Lösung: Das Prisma im Laserstrahl

(2. Runde 1994)

Die Kraft des Laserlichts auf das Prisma ergibt sich aus der Änderung der Impulse der Photonen bei der Brechung. Wenn wir mit $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ die Einheitsvektoren in x- und y-Richtung bezeichnen, hat ein Photon der Energie E anfangs den Impuls

$$\vec{p}_A = \frac{E}{c}\,\vec{e}_x\,.$$

Die auf die obere Prismenfläche auftreffenden Photonen werden bei der Brechung um den Winkel φ nach unten abgelenkt. Danach ist der Impuls des Photons

$$\vec{p}_E = \frac{E}{c}\cos\varphi\cdot\vec{e}_x - \frac{E}{c}\sin\varphi\cdot\vec{e}_y\,.$$

Seine Impulsänderung ist also

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_E - \vec{p}_A = \frac{E}{c}(\cos\varphi - 1)\cdot\vec{e}_x - \frac{E}{c}\sin\varphi\cdot\vec{e}_x\,. \quad (1)$$

Entsprechend ergibt sich für ein auf die untere Prismenhälfte treffendes Photon, das um φ nach oben abgelenkt wird

$$\Delta\vec{p}_2 = \frac{E}{c}(\cos\varphi - 1)\cdot\vec{e}_x + \frac{E}{c}\sin\varphi\cdot\vec{e}_x\,. \qquad (2)$$

Wenn n Photonen pro Sekunde auf eine Prismenfläche treffen, ist der in der Zeit Δt auf das Prisma übertragene Impuls $-n\Delta t\Delta\vec{p}$ und damit die auf das Prisma ausgeübte Kraft $\vec{F} = -n\Delta\vec{p}$. Die Leistung des Laserstrahls ist $n\,E$ und damit ist die mittlere Intensität des auf die Fläche treffenden Laserlichts $I = \frac{nE}{hb}$.

Die Kraft auf das Prisma setzt sich aus den Kräften zusammen, die durch die auf die beiden Prismenflächen auftreffenden Photonen bewirkt werden.

$$\vec{F} = -n_1\Delta\vec{p}_1 - n_2\Delta\vec{p}_2 = -\frac{hb}{E}(I_1\Delta\vec{p}_1 + I_2\Delta\vec{p}_2)\,.$$

Nur die y-Komponente dieser Kraft kann die Schwerkraft des Prismas kompensieren. Mit (1) und (2) erhält man dann

$$F_y = \frac{hb}{c}I_1\sin\varphi - \frac{hb}{c}I_2\sin\varphi = \frac{hb\sin\varphi}{c}(I_1 - I_2)\,. \quad (3)$$

Der Winkel φ kann mit Hilfe des Brechungsgesetzes durch n und α ausgedrückt werden. Nach einiger Rechnerei erhält man

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{n^2 - \cos^2\alpha}\\ &= 0,2741\,.\end{aligned}$$

Zu bestimmen sind noch die mittleren Intensitäten I_1 und I_2. Die Intensitätsverteilung im Laserstrahl in y-Richtung ist gegeben:

$$I(y) = \begin{cases} I_0\left(1 - \frac{y}{4h}\right) & \text{für } 0 \le y \le 4h \\ I_0\left(1 + \frac{y}{4h}\right) & \text{für } -4h \le y < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Wir betrachten den Fall einer kleinen Auslenkung $-y_0$ nach unten. Dann ist die untere Prismenfläche ganz in der unteren Hälfte des Strahles, die obere Prismenhälfte zum Teil.

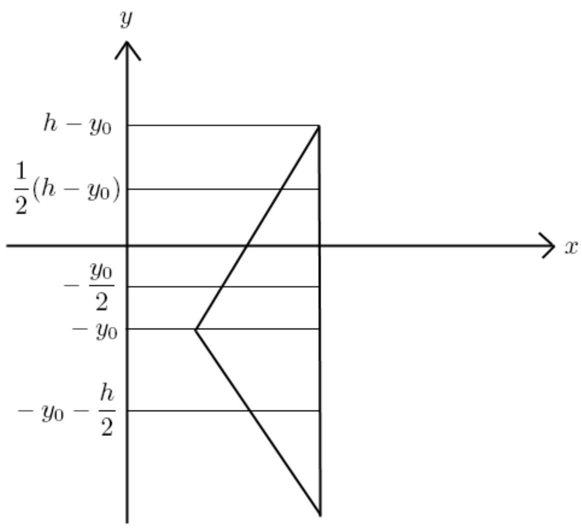
Die mittlere Intensität ist für die untere Fläche gleich der Intensität an der Stelle $-y_0 - \frac{h}{2}$, da der Intensitätsabfall linear ist.

$$I_2 = I_0\left(1 - \frac{y_0}{4h} - \frac{1}{8}\right) = I_0\left(\frac{7}{8} - \frac{y_0}{4h}\right)\,. \qquad (4)$$

Um die mittlere Intensität für die obere Fläche zu berechnen, bestimmt man zunächst die mittleren Intensitäten für den in der unteren und den in der oberen Strahlhälfte befindlichen Flächenteil. Die erste ist gleich der Intensität an der Stelle $-\frac{y_0}{2}$, die zweite gleich der Intensiät an der Stelle $\frac{1}{2}(h - y_0)$. Der untere Strahl bedeckt den $\frac{y_0}{h}$-ten Teil der Fläche, der obere den $\left(1 - \frac{y_0}{h}\right)$-ten Teil.

Die gesamte mittlere Intensität ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0\left(1 - \frac{y_0}{8h}\right)\frac{y_0}{h} + I_0\left(1 - \frac{h - y_0}{8h}\right)\left(1 - \frac{y_0}{h}\right) \\ &= I_0\left(\frac{y_0}{h} - \frac{y_0^2}{8h^2}\right) + I_0\left(\frac{7}{8} + \frac{y_0}{8h}\right)\left(1 - \frac{y_0}{h}\right) \\ &= I_0\left(\frac{7}{8} + \frac{y_0}{4h} - \frac{y_0^2}{4h^2}\right)\,. \end{aligned} \qquad (5)$$



Einsetzen von (4) und (5) in (3) ergibt:

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{hb\sin\varphi}{c} I_0 \left(\frac{7}{8} + \frac{y_0}{4h} - \frac{y_0^2}{4h^2} - \frac{7}{8} + \frac{y_0}{4h} \right) \\ &= \frac{hb\sin\varphi}{c} I_0 \left(\frac{y_0}{2h} - \frac{y_0^2}{4h^2} \right) . \end{aligned} \tag{6}$$

Diese Kraft soll die Schwerkraft kompensieren

$$mg = \frac{hbI_0\sin\varphi}{4h^2c}(2hy_0 - y_0^2) . \tag{7}$$

Man erhält eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von y_0

$$y_0^2 - 2hy_0 + \frac{4mghc}{bI_0\sin\varphi} = 0 . \tag{8}$$

Die Lösung ist

$$y_0 = h - \sqrt{h^2 - \frac{4mghc}{bI_0\sin\varphi}} . \tag{9}$$

Die zweite Lösung mit positiver Wurzel kommt nicht in Betracht, denn sie ergibt einen Wert $y_0 > h$ bzw. $-y_0 < -h$, d.h. das Prisma befände sich ganz in der unteren Strahlhälfte. Bei der Lösung wurde aber vorausgesetzt, dass auch ein Teil in der oberen Strahlhälfte liegt. Man kann leicht zeigen, dass die Kraft auf das Prisma unabhängig von y_0 ist, wenn es sich ganz in der unteren Strahlhälfte befindet. Die maximale Kraft wird bei $-y_0 = -h$ erreicht und bleibt dann für noch größere Auslenkungen konstant. In diesem Fall ist also kein Gleichgewichtszustand mehr möglich.

Auch der Fall, dass das Prisma so tief liegt, dass es sich nur noch teilweise im Strahl befindet, scheidet aus. Zwar gibt es hier wieder einen Gleichgewichtszustand; dieser ist jedoch labil. Nur bei dem durch Gleichung (9) gegebenen y_0 kann das Prisma also im Schwerefeld schweben und dies ist nur möglich für

$$F_{max} = \frac{hbI_0\sin\varphi}{4c} > mg .$$

Mit der Masse des Prismas $m = \frac{h^2 b\rho}{\tan\frac{\alpha}{2}}$ erhält man aus (9);

$$\begin{aligned} y_0 &= h - h\sqrt{1 - \frac{4hg\rho c}{\sqrt{3}I_0\sin\varphi}} \\ &= 10^{-5}(1 - \sqrt{1 - 0,62})\ \mathrm{m} \\ &= 3,8\ \mu\mathrm{m} . \end{aligned}$$