

# **46. Internationale PhysikOlympiade Mumbai, Indien 2015**



## **Wettbewerbsleitung**

Dr. Stefan Petersen  
Tel.: 0431 / 880 - 5120  
email: [petersen@ipho.info](mailto:petersen@ipho.info)

## **Sekretariat**

Lulu Hoffmeister  
Tel.: 0431 / 880 - 5387  
email: [sekretariat@ipho.info](mailto:sekretariat@ipho.info)

Anschrift: IPN an der Universität Kiel  
Olshausenstraße 62  
24098 Kiel

Fax: 0431 / 880 - 3148

Webseite: [www.ipho.info](http://www.ipho.info)

## **Lösungen zu den Aufgaben der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur 46. IPhO 2015**

Diese Musterlösungen und Bepunktungsrichtlinien waren die Grundlage der Bewertung der Arbeiten der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur Internationalen PhysikOlympiade 2015. Bei abweichenden Lösungswegen wurden die Bewertungen entsprechend angepasst.

Die Lösungen enthalten wahrscheinlich noch Fehler. Für Hinweise und Verbesserungsvorschläge unter [petersen@ipho.info](mailto:petersen@ipho.info) sind wir sehr dankbar.

### Aufgabe 1 Den Berg hinauf

(25 + 5\* Pkt.)

Zwei an der Grundfläche aneinandergeliebte homogene Kegel mit Grundkreisradius  $R$  und Öffnungswinkel  $\alpha$  liegen, wie in der nebenstehenden Abbildung zu sehen, auf zwei dünnen Schienen, die einen Öffnungswinkel  $\beta$  besitzen. Die durch die Schienen aufgespannte Ebene schließt einen Winkel  $\gamma$  mit der Horizontalen ein. A bezeichnet den tiefsten Punkt der Schienen. Die Masse des Doppelkegels beträgt  $m$ .

Der Schwerpunkt des Doppelkegels befindet sich anfänglich bezogen auf die durch die beiden Schienen aufgespannte Ebene senkrecht über dem Punkt A. Nach dem Loslassen rollt der Doppelkegel von alleine entlang der Schienen - also bergauf. Dabei befindet sich die Grundfläche der Kegel immer mittig zwischen den Schienen. Sie können annehmen, dass die von den Verbindungslinien zwischen dem Kegelschwerpunkt und den Kontaktpunkten des Doppelkegels mit den Schienen aufgespannte Ebene immer senkrecht zu der Ebene der Schienen ist.

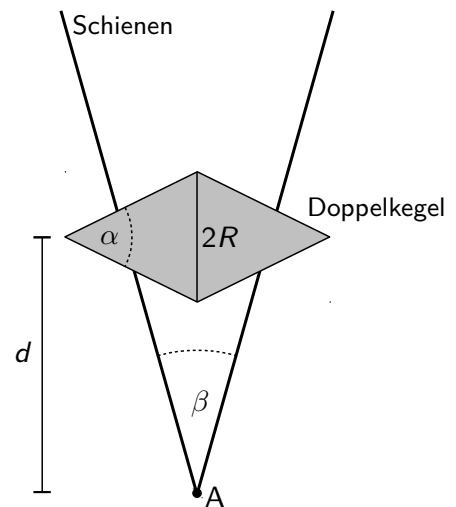


Abb. 1: Doppelkegel auf Schienen (Aufsicht auf die Schienenebene).

1.a) Erklären Sie physikalisch, wie es möglich ist, dass der Doppelkegel nach dem Loslassen im Punkt A scheinbar bergauf rollt. Geben Sie an, welche Bedingung(en) die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  dafür erfüllen müssen und begründen Sie Ihre Antwort. (8 Pkt.)

1.b) Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment  $I$  des Doppelkegels bei Rotation um die Achse durch die beiden Kegelspitzen

$$I = \frac{3}{10} m R^2$$

beträgt. (5 Pkt.)

1.c) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Doppelkegels als Funktion der in der Schienenebene gerollten Strecke  $d$ . (5 Pkt.)

1.d) Berechnen Sie für die Werte  $\alpha = 50^\circ$ ,  $\beta = 40^\circ$ ,  $\gamma = 5,0^\circ$ ,  $R = 10 \text{ cm}$  und  $m = 100 \text{ g}$  die Strecke, die der Doppelkegel insgesamt bergauf rollt, sowie die dabei maximal erreichte Geschwindigkeit. (7 Pkt.)

Sie können annehmen, dass der Doppelkegel ohne zu rutschen rollt.

*Bonusaufgabe:* Mit der folgenden Teilaufgabe können Sie sich 5 Bonuspunkte erarbeiten.

\*1.e) Die Annahme, dass die von den Verbindungslinien zwischen dem Kegelschwerpunkt und den Kontaktpunkten des Doppelkegels mit den Schienen aufgespannte Ebene immer senkrecht auf der Ebene der Schienen steht, ist streng genommen nicht richtig. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Schienen den Doppelkegel in dem in der vorigen Teilaufgabe beschriebenen Fall tatsächlich berühren und finden Sie heraus, was beim Loslassen im Punkt A tatsächlich passiert. (5\* Pkt.)

**Lösung**

- 1.a) Der Doppelkegel kann nur dann die Schienen „bergauf“ rollen, wenn sich dabei sein Schwerpunkt nach unten bewegt, also potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt wird. Bezeichne mit  $2b$  den Abstand der Schienen nach einer Lauflänge  $d$ . Dann ist

$$b = d \tan(\beta/2). \quad (1.1)$$

Mit den Bezeichnungen in der nebenstehenden Abbildung gilt für die Höhe  $H$  des Schwerpunktes des Doppelkegels über dem Startpunkt  $A$

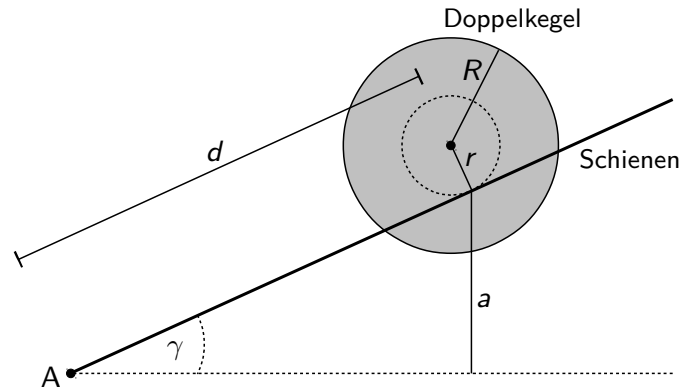


Abb. 2: Skizze des Doppelkegels auf den Schienen von der Seite. Der Winkel  $\gamma$  ist stark überhöht.

$$\begin{aligned} H &= a + r \cos \gamma = d \sin \gamma + \left( R - b \tan \frac{\alpha}{2} \right) \cos \gamma \\ &= R \cos \gamma + d \left( \sin \gamma - \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \cos \gamma \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Damit die potentielle Energie mit steigendem  $d$  abnimmt, muss die Klammer kleiner 0 sein. Es muss also für die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  gelten:

$$\boxed{\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} > \tan \gamma}. \quad (1.3)$$

Aus Gleichung (1.2) ist erkennbar, dass die Höhe  $a$  der Schienen linear mit der Rollstrecke  $d$  zunimmt, während der vertikale Abstand des Doppelkegelschwerpunktes zu den Schienen linear mit  $d$  abnimmt. Gleichung (1.3) drückt damit die Bedingung aus, dass die Rate mit der sich der vertikale Abstand verringert betragsmäßig größer ist als der Anstieg der Schienen.

- 1.b) Das gesuchte Trägheitsmoment  $I$  kann man durch eine Zerlegung des Doppelkegels entlang der Drehachse in dünne Scheiben der Dicke  $d\ell$ , dem Radius  $r$  und der Masse  $dM(r) = \frac{m}{V} \pi r^2 d\ell$  bestimmen, wobei  $V$  das Gesamtvolumen des Doppelkegels bezeichnet. Das Trägheitsmoment einer dieser Scheiben bei Drehung um die Achse durch die Kegelspitzen beträgt

$$dI_{\text{Scheibe}} = \int_0^r d r' 2 \pi r' \frac{m}{V} r'^2 d\ell = \frac{1}{2} \pi \frac{m}{V} r^4 d\ell, \quad (1.4)$$

mit  $V = \frac{2}{3} \pi R^3 / \tan(\alpha/2)$ .

Das Gesamtträgheitsmoment des Doppelkegels bestimmt sich aus einer Integration über die Scheiben, wobei sich der Scheibenradius aus der Position entlang der Kegelachse zu  $r = \ell \tan \frac{\alpha}{2}$  ergibt:

$$\boxed{I = 2 \int_0^{R/\tan \frac{\alpha}{2}} d\ell \frac{\pi}{2} \frac{m}{V} \ell^4 \tan^4 \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{10} m R^2}. \quad (1.5)$$

- 1.c) Die Geschwindigkeit  $v$  des Doppelkegels kann über den Energiesatz berechnet werden.

$$m g R \cos \gamma = m g H + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (1.6)$$

Die linke Seite ist gleich der anfänglichen potentiellen Energie. Da der Doppelkegel nicht rutschen soll, entspricht die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Doppelkegels gerade der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  mal dem Abstand  $r$  der Achse durch die Kegelspitzen zum Auflagepunkt. Es gilt also die Rollbedingung

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{R - d \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}. \quad (1.7)$$

Auflösen von Gleichung (1.6) nach der Geschwindigkeit ergibt

$$v(d) = \sqrt{2gd} \sqrt{\frac{\tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \cos \gamma - \sin \gamma}{1 + \frac{3}{10 \left(1 - \frac{d}{R} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}\right)^2}}}. \quad (1.8)$$

1.d) Die insgesamt bergauf zurückgelegte Strecke ergibt sich aus der zweiten Nullstelle der Geschwindigkeit (1.8)<sup>1</sup>. Für diese gilt

$$1 - \frac{d}{R} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2} = 0 \quad (1.9)$$

und damit für die insgesamt bergauf zurückgelegte Strecke<sup>2</sup>

$$d_{\max} = \frac{R}{\tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}} \approx 59 \text{ cm}. \quad (1.10)$$

An dieser Stelle sind die Schienen so weit auseinander, dass der Kegel gerade hindurchfällt, da

$$b = d \tan \frac{\beta}{2} = \frac{R}{\tan \frac{\alpha}{2}}. \quad (1.11)$$

Es ist übrigens nicht möglich, die Energieerhaltung mit  $v = 0$  und  $\omega = 0$  an dieser Stelle zu verwenden, da  $\omega$  bei dieser Strecke nicht gleich 0 ist, wohl aber der Abstand der Drehachse von dem Auflagepunkt.

Die maximale Geschwindigkeit kann formal durch Nullsetzen der Ableitung von (1.8) bestimmt werden. Dies führt allerdings auf ein Polynom dritten Grades. Alternativ kann man das Maximum aus einem Graphen für  $v$  als Funktion von  $d$  (s. Abb. 3) bestimmen zu etwa

$$v_{\max} \approx 46,4 \text{ cm s}^{-1} \quad \text{bei} \quad d \approx 29 \text{ cm}. \quad (1.12)$$

<sup>1</sup>Alternativ kann auch die Erkenntnis der linearen Verringerung der Schwerpunkthöhe mit der Strecke  $d$  benutzt werden, um zu schließen, dass die maximale Strecke erreicht wird, wenn der Doppelkegel gerade durch die Schienen fällt.

<sup>2</sup>*Hinweis:* Die zum Erreichen dieser Strecke benötigte Zeit ist allerdings unendlich lang, so dass sie in der Praxis nicht erreicht wird.

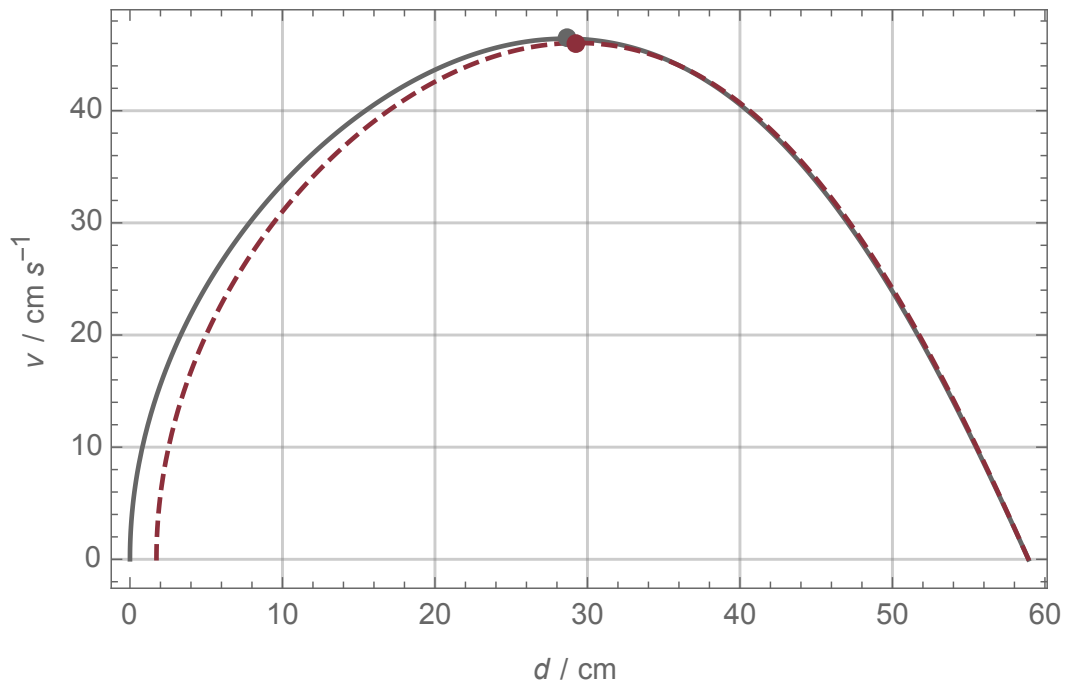


Abb. 3: Graph der Geschwindigkeit  $v$  des Doppelkegels als Funktion der Rollstrecke  $d$  in der angenommenen Näherung (grau, durchgehend) und mit Berücksichtigung des tatsächlichen Berührungspunktes (rot, gestrichelt), die im nächsten Aufgabenteil behandelt wird.

- \*1.e) Zur Vereinfachung betrachten wir die Schienen in diesem Fall zunächst als horizontal liegend und legen eine horizontale Achse mit A als Ursprung mittig zwischen die Schienen. Die Koordinate des Schwerpunktes des Doppelkegel auf dieser Achse entspricht dann gerade der Rollstrecke  $d$ . Setzt man den Doppelkegel nun von oben auf die Schienen, so berührt dieser die Schienen als erstes an den gesuchten Kontaktpunkten K, deren horizontale Komponente wir mit  $d - x$  bezeichnen (vgl. Abb. 4). Der Wert von  $x$  ist dadurch festgelegt, dass er bei gegebener Rollstrecke  $d$  zu dem größten möglichen vertikalen Abstand  $h_d$  zwischen Schwerpunkt und Schienen führt.

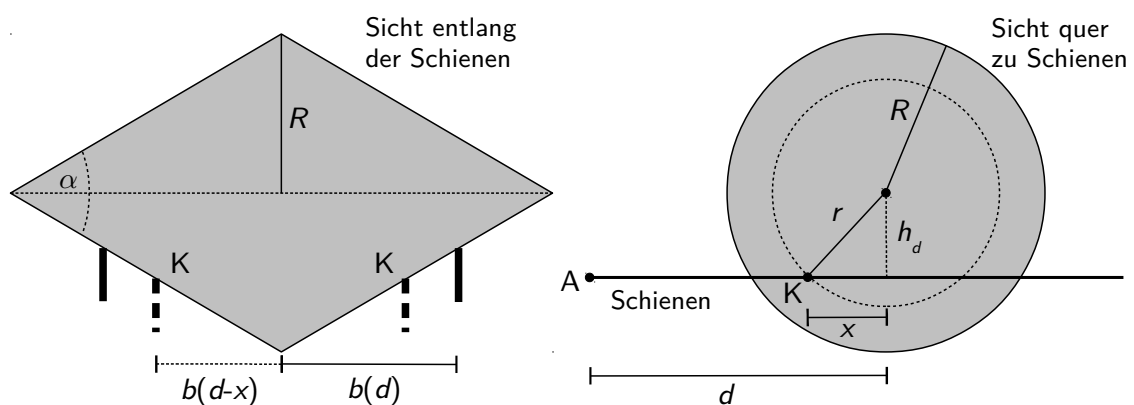


Abb. 4: Skizzen zur Bestimmung der Lage der tatsächlichen Kontaktpunkte zwischen Doppelkegel und Schienen (links: frontal, rechts: von der Seite). Die von dem Doppelkegel zurückgelegte Rollstrecke beträgt dabei  $d$ .

Mit den Bezeichnungen in der obenstehenden Abbildung gilt nach Pythagoras

$$h_d(x) = \sqrt{(r(b(d-x)))^2 - x^2}. \quad (1.13)$$

Hierbei bezeichnet  $r(b)$  den Radius des Doppelkegels in einem Abstand  $b$  von der Grundkreisebene. Dieser Abstand entspricht dem halben Schienenabstand (1.1), der wiederum abhängig von der horizontalen Koordinate ist, die in der gegebenen Situation  $d-x$  beträgt. Diese Betrachtung ist möglich, solange  $d-x \geq 0$  gilt, der Kontaktpunkt also nicht vor A liegt. Der Fall  $d-x < 0$  wird später getrennt betrachtet.

Aus Gleichung (1.13) lässt sich der Wert von  $x$  bestimmen, für den  $h_d$  maximal wird. Mit der Abkürzung  $t := \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}$  ist analog zu (1.2)  $r(b(d-x)) = R - (d-x)t$  und es folgt

$$\begin{aligned} h_d(x) &= \sqrt{(R - (d-x)t)^2 - x^2} \\ &= \sqrt{1-t^2} \sqrt{\left(\frac{R-dt}{1-t^2}\right)^2 - \left(x - \frac{R-dt}{1-t^2}t\right)^2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Das Maximum dieses Ausdruckes wird angenommen für  $x = x_{\max} = \frac{R-dt}{1-t^2}t = r(b(d)) \frac{t}{1-t^2}$  und die Höhe des Schwerpunktes  $h_d$  des Doppelkegels über den Schienen in Abhängigkeit von der Rollstrecke  $d$  beträgt damit

$$h_d = \frac{R-dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{r(b(d))}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (1.15)$$

Die Höhe wird in diesem Fall also um einen konstanten Faktor von  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \approx 1,015$  gegenüber dem vorherigen Ergebnis verändert.

Für kleine Werte von  $d$  wird das Maximum der Höhe für  $x$ -Werte angenommen, die größer als  $A$  sind. In diesem Fall wäre der Kontaktpunkt jenseits des Startpunktes A, was nicht möglich ist. Im Grenzfall ist  $x_{\max} = d$  bzw.  $d = Rt$ . In diesem Fall ist  $h_d = \sqrt{R^2 - d^2}$ , der Doppelkegel berührt mit den Kegelgrundflächen also gerade den Punkt A. Für kleinere Werte von  $d$  dreht sich der Doppelkegel um den Punkt A und die Höhe  $h_d$  beträgt nach Pythagoras  $h_d = \sqrt{R^2 - d^2}$ . Damit lässt sich die Höhe des Schwerpunktes über den Schienen zusammenfassend angeben als

$$h_d = \begin{cases} \sqrt{R^2 - d^2} & \text{für } 0 \leq d \leq Rt \\ \frac{R-dt}{\sqrt{1-t^2}} & \text{für } Rt < d \leq \frac{R}{t} \end{cases}. \quad (1.16)$$

Die obere Grenze für  $d$  ergibt sich aus der maximal möglichen Schienenbreite, durch die der Doppelkegel gerade noch nicht hindurchfällt. Die Betrachtung für die schiefe Ebene verläuft nun analog zu den vorherigen Aufgabenteilen mit einer neuen Höhe  $H$  und einer neuen Rollbedingung. Es ist

$$H = d \sin \gamma + h_d \cos \gamma \quad \text{und} \quad \omega = \frac{v}{h_d}. \quad (1.17)$$

Bemerkenswert ist, dass  $H$  beginnend bei  $d = 0$  zunächst zunimmt, der Schwerpunkt des Doppelkegels sich also zunächst ein Stück aufwärts bewegen muss, bevor der Doppelkegel von alleine „bergauf“ rollt<sup>3</sup>. In Abbildung 3 ist die resultierende Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Rollstrecke  $d$  auch für diesen Fall angegeben. Die maximale Geschwindigkeit ist tatsächlich geringfügig kleiner als in der nur näherungsweise korrekten Betrachtung. Der Maximalwert von  $d$  bleibt aber der gleiche.

<sup>3</sup>Dieses Verhalten kann man z.B. auch bei einem Ball beobachten, der auf zwei aufgestellten und an einem Ende mit Klebeband verbundenen Linealen als Schienen rollt.

**Anmerkung:**

Über das Phänomen des scheinbar aufwärts rollenden Doppelkegels wird an verschiedenen Stellen in der Literatur berichtet. Eine einführende Darstellung ist zum Beispiel zu finden in Ucke, C. & Becker, J. (1997). Roll, Kegel roll! *Physik in unserer Zeit*, 28, 161-163. Eine genauere mathematische Betrachtung liefert Gandhi, S.C. & Efthimiou, C.J. (2005). The ascending double cone: a closer look at a familiar demonstration. *Eur. J. Phys.*, 28, 681-694.

<b>Bewertung - Den Berg hinauf</b>		<b>Punkte</b>
1.a)	Angabe einer qualitativen Erklärung des „Bergauf“-Rollens	3
	Bestimmung des Schienenabstandes nach Laufstrecke $d$	1
	Angabe eines Ausdruckes für die Höhe des Schwerpunktes (1.2)	2
	Formulierung einer Bedingung für die Winkel wie in (1.3)	2
1.b)	Formulierung einer Idee zur Bestimmung des Trägheitsmomentes	2
	Bestimmung des Trägheitsmomentes einer Scheibe (1.4)	2
	Aufintegrieren zum Gesamtträgheitsmoment und Angabe des Ergebnisses (1.5)	1
1.c)	Aufstellen des Energiesatzes (1.6)	2
	Angabe der Rollbedingung (1.7)	2
	Umformen zu Ausdruck für Geschwindigkeit (1.8)	1
1.d)	Formulierung einer Idee zur Bestimmung der maximalen Rollstrecke	2
	Bestimmung der maximalen Rollstrecke (1.10)	1
	Formulierung einer Idee zur Bestimmung der maximalen Geschwindigkeit	2
	Bestimmung der maximalen Geschwindigkeit (1.12)	2
		<b>25</b>
*1.e)	Bestimmung der tatsächlichen Kontaktpunkte des Kegels mit den Schienen	2
	Aufstellen eines Ausdruckes für die Höhe des Schwerpunktes in Abhängigkeit von der Rollstrecke $d$ (1.16)	2
	Erkennen, dass der Doppelkegel nun nicht mehr von alleine losrollt	1

## Aufgabe 2 Linse am Aquarium

(20 Pkt.)

In einem großen, wassergefüllten, quaderförmigen Aquarium befindet sich ein kleiner leuchtender Gegenstand. Die flache Seite einer Plankonvexlinse mit Brennweite  $f$  wird von außen so auf eine Seitenwand des Aquariums geklebt, dass sich der Gegenstand auf der optischen Achse der Linse befindet.

Der Brechungsindex von Wasser beträgt 1,33, der des Linsenmaterials 1,50. Sowohl die Wand des Aquariums als auch die Linse können als sehr dünn angesehen werden. Sie können sich darüber hinaus auf die Betrachtung von Strahlen nah an der optischen Achse beschränken.

- 2.a) Bestimmen Sie die Lage möglicher Bilder des Gegenstandes auf der optischen Achse in Abhängigkeit von der Lage des Gegenstandes selbst. Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein reelles oder virtuelles, ein aufrechtes oder umgekehrtes und um ein vergrößertes oder verkleinertes Bild handelt. (11 Pkt.)
- 2.b) Berechnen Sie, welche Werte die Bildweite und die Vergrößerung annehmen, wenn die Gegenstandsweite dem 2,5-fachen der Brennweite  $f$  entspricht. (3 Pkt.)
- 2.c) Führen Sie die Betrachtung aus Aufgabenteil 2.b) für den Fall durch, dass die Linse in analoger Weise an die Innenseite der Aquariumswand geklebt wird. (6 Pkt.)

### Lösung

- 2.a) Bezeichne mit  $g$  die Gegenstands- und mit  $b$  die Bildweite sowie mit  $G$  und  $B$  deren Größen<sup>4</sup>. Weiter sei  $n_w$  der Brechungsindex von Wasser und  $n_L$  der der Linse.

Da sich auf beiden Seite der Linse unterschiedliche Medien befinden, sind die Brennweiten für Strahlen, die von verschiedenen Seiten einfallen, nicht mehr identisch. Bezeichne mit  $f_G$  die Brennweite auf der Gegenstandsseite und mit  $f_B$  die auf der Bildseite.

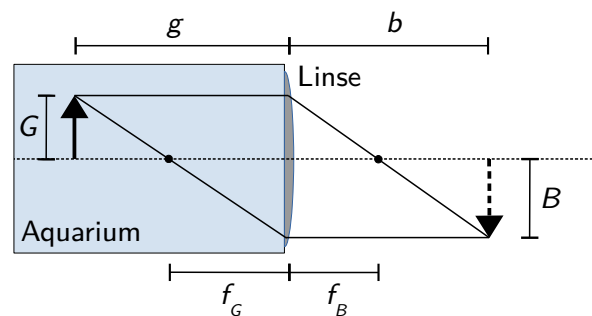


Abb. 5: Skizze zur Bildentstehung außerhalb des Aquariums. Für ein virtuelles Bild erfolgt die Konstruktion analog.

Dann gilt mit dem Strahlensatz für die Brennpunktstrahlen:

$$\frac{G}{g - f_G} = \frac{B}{f_B}, \quad \text{sowie} \quad \frac{B}{b - f_B} = \frac{G}{f_B}. \quad (2.1)$$

Daraus ergibt sich für die Vergrößerung des Gegenstandes bei der Abbildung

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b - f_B}{f_B} = \frac{f_G}{g - f_G}. \quad (2.2)$$

Umformen von Gleichung (2.2) liefert eine Beziehung analog zur Abbildungsgleichung:

$$\frac{f_G}{g} + \frac{f_B}{b} = 1. \quad (2.3)$$

Außerdem gilt für die Vergrößerung mit  $f_G = g - f_B \frac{g}{b}$

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \frac{f_G}{f_B}. \quad (2.4)$$

<sup>4</sup>Beachte, dass damit  $B$  für ein invertiertes Bild und  $b$  für ein reelles Bild, also ein Bild außerhalb des Aquariums, positiv gewählt ist.



Die beiden Brennweiten  $f_G$  und  $f_B$  ergeben sich aus der Überlegung, dass sich die Linse bildseitig wie die Linse an Luft verhält und an der planen Wasserseite Strahlen in Kleinwinkelnäherung um einen Faktor  $n_W$  weniger stark abgelenkt werden, als an Luft, so dass sich die Brennweite um genau diesen Faktor erhöht. Es ist also  $f_B = f$  und  $f_G = n_W f$ .

Damit gilt für die Abbildung der Zusammenhang<sup>5</sup>

$$\frac{1}{f} = \frac{n_W}{g} + \frac{1}{b} \quad \text{bzw.} \quad b = \frac{gf}{g - n_W f}. \quad (2.5)$$

Die Vergrößerung  $V$  ergibt sich damit zu

$$V = n_W \frac{b}{g} = \frac{n_W f}{g - n_W f}. \quad (2.6)$$

Folgende Abbildungen sind damit möglich:

- $g \geq 2 \cdot n_W \cdot f$   
Reelles, umgekehrtes und verkleinertes Bild. Für die Bildweite gilt  $2 \cdot f \geq b > f$
- $2 \cdot n_W \cdot f > g > n_W \cdot f$   
Reelles, umgekehrtes und vergrößertes Bild. Für die Bildweite gilt  $b > 2 \cdot f$
- $n_W \cdot f > g$   
Virtuelles, aufrechtes und vergrößertes Bild auf der Seite des Gegenstandes.

2.b) Für  $g = 2,5 \cdot f$  liegt der mittlere Fall vor, also ein reelles umgekehrtes und vergrößertes Bild. Die Bildweite und die Vergrößerung sind gegeben durch:

$$\boxed{b = \frac{2,5 \cdot f}{2,5 - n_W} \approx 2,1 f}, \quad \boxed{V = \frac{n_W}{2,5 - n_W} \approx 1,1}. \quad (2.7)$$

2.c) Für den Fall, dass die Linse an die innere Wand des Aquariums geklebt wird, ist die Brennweite auf der Gegenstandsseite gleich der einer dünnen Glaslinse komplett in Wasser bzw. gleich der Brennweite einer dünnen Linse vom Brechungsindex  $n_L/n_W$  in Luft. Damit sind mit der Linsenschleiferformel<sup>6</sup>

$$f_G = \frac{n_W (n_L - 1)}{n_L - n_W} f \approx 3,91 f \quad \text{und} \quad f_B = \frac{1}{n_W} f_G = \frac{n_L - 1}{n_L - n_W} f \approx 2,94 f. \quad (2.8)$$

Für  $g = 2,5 \cdot f$  liefern die Gleichungen (2.3) und (2.4) ein virtuelles Bild mit  $b \approx -5,2 f$  sowie  $V = -2,8$ .

<sup>5</sup>Diese Form der Abbildungsgleichung dünner Linsen ist wahrscheinlich auch in einigen Lehrbüchern angegeben. Sie sollte bei korrekter Quellenangabe dann auch mit voller Punktzahl bewertet werden.

<sup>6</sup>Für eine plankonvexe Linse liefert diese für die Brennweite  $f = R n_0 / (n - n_0)$ , wobei  $R$  den (hier positiv gewählten) Radius der brechenden Oberfläche angibt und  $n$  bzw.  $n_0$  die Brechungsindizes des Linsenmaterials bzw. des umgebenden Mediums bezeichnen.

Bewertung - Linse am Aquarium		Punkte
2.a)	Erläuterung der relevanten Größen und Strahlenverläufe wie in (2.1) und (2.2)	2
	Erkennen, dass die bildseitige Brennweite $f_B$ gleich der Brennweite $f$ ist	1
	Ableitung der Brennweite $f_G = n_w f$ im Aquarium	2
	Herleitung einer Abbildungsgleichung wie (2.5) und eines Ausdruckes für die Vergrößerung (2.6)	3
	Untersuchung der Abbildungen in den drei Fällen und Angabe der Eigenschaften der jeweiligen Bilder (je 1 Pkt.)	3
2.b)	Erkennen des relevanten Falles	1
	Bestimmung der Werte für Bildweite und Vergrößerung (2.7)	2
2.c)	Bestimmung der beiden Brennweiten (2.8) in diesem Fall (je 2 Pkt.)	4
	Bestimmung der Werte für Bildweite und Vergrößerung in diesem Fall	2
		<b>20</b>

### Aufgabe 3 Gefriertruhenheizung

(25 Pkt.)

Peter, Paul und Petra machen Urlaub in einer kleinen Blockhaushütte. Bei ihrer Ankunft in der Hütte ist diese ziemlich kalt. Zum Glück können sie das Innere aber mit dem Ofen schnell auf eine behagliche Temperatur aufheizen. Sie fragen sich, was sie gemacht hätten, wenn der Ofen nicht da gewesen wäre. Da fällt ihnen die Gefriertruhe in der Hütte auf ...

Spinnen Sie den Gedanken der drei Urlauber weiter und stellen Sie sich folgende Situation vor:

Eine einsame, gut isolierte Blockhaushütte befindet sich in einer Gegend, in der die Sonne nicht scheint und die Außentemperatur konstant bei  $5,0^\circ\text{C}$  liegt. Die Hütte ist leer bis auf eine gefüllte Gefriertruhe, deren Innenraum auf einer konstanten Temperatur von  $-18,0^\circ\text{C}$  gehalten wird. Durch die Gefriertruhe wird die Hütte auf eine Temperatur von  $6,5^\circ\text{C}$  „aufgeheizt“. Nehmen Sie an, dass die Gefriertruhe wie eine ideale Wärmepumpe arbeitet.

Wenn die Truhe nach draußen gebracht und ausgestellt wird, wärmt sich ihr Inhalt langsam auf. Eine viertel Stunde nach dem Ausschalten beträgt die Temperatur des Inhaltes noch  $-12,4^\circ\text{C}$ , eine halbe Stunde nach dem Ausschalten  $-8,1^\circ\text{C}$ . Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass die Temperatur des Inhaltes überall gleich ist und die Wärmekapazität der gefüllten Truhe etwa  $80\text{ kJ K}^{-1}$  beträgt.

- 3.a) Bestimmen Sie, welche Temperatur sich in der Hütte nach längerer Zeit näherungsweise einstellen würde, wenn eine zweite, identische Gefriertruhe gleichzeitig mit der ersten in der Hütte betrieben würde. Die Innenraumtemperaturen der Gefriertruhen sollen dabei weiterhin konstant  $-18,0^\circ\text{C}$  betragen. (13 Pkt.)
- 3.b) Berechnen Sie näherungsweise für beide Fälle die von der Gefriertruhe bzw. den Gefriertruhen aufgenommene elektrische Leistung. (7 Pkt.)
- 3.c) Schätzen Sie ab, welche maximale Hüttentemperatur sich nach längerer Zeit einstellen kann, wenn eine größere Gefriertruhe verwendet wird, die in gleicher Weise wie die bisher betrachteten funktioniert, die ähnlich gut isoliert ist und die ebenfalls eine konstante Innenraumtemperatur von  $-18,0^\circ\text{C}$  aufweist. (5 Pkt.)

**Lösung**

3.a) Die Gefriertruhe arbeitet als ideale Wärmepumpe, also wie eine entgegengesetzt betriebene ideale Wärmekraftmaschine. Sie nimmt eine Wärme  $Q_K$  im Inneren der Gefriertruhe auf und gibt die Wärme  $Q_H$  in der Hütte ab ( $Q_H$  wird als von der Wärmepumpe abgegebene Wärme hier als negativ festgelegt). Bezeichne mit  $T_K$  die Temperatur in der Gefriertruhe und mit  $T_H$  die in der Hütte. Da die Wärmepumpe ideal arbeitet, ändert sich die Entropie während des Pumpens nicht, und es gilt

$$\frac{Q_K}{T_K} + \frac{Q_H}{T_H} = 0. \quad (3.1)$$

Der Wirkungsgrad einer idealen Wärmekraftmaschine entspricht dem Carnotwirkungsgrad  $\eta$  mit

$$\eta = 1 - \frac{T_K}{T_H} = -\frac{W}{Q_H} = \frac{W}{Q_K} \frac{T_K}{T_H}, \quad (3.2)$$

wobei  $W$  die eingesetzte mechanische Arbeit bezeichnet, die vereinfachend gleich der eingesetzten elektrischen Arbeit gesetzt wird.

Wenn sich ein (dynamisches) Gleichgewicht einstellt, also wenn sich die Temperaturen nicht mehr ändern, muss der Wärmeaustausch der Gefriertruhe gerade den Wärmefluss durch Wärmeleitung ausgleichen, der proportional zu den jeweiligen Temperaturdifferenzen ist. Bezeichne mit  $\dot{Q}_K$  und  $\dot{Q}_H$  die pro Zeit in der Gefriertruhe aufgenommene bzw. die von der Gefriertruhe in der Hütte abgegebene Wärme. Dann muss also im Gleichgewicht gelten:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_K &= P \frac{T_K}{T_H - T_K} \stackrel{!}{=} \sigma_K (T_H - T_K) \\ -\dot{Q}_H &= P \frac{T_H}{T_H - T_K} \stackrel{!}{=} \sigma_K (T_H - T_K) + \sigma_H (T_H - T_A) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Hierbei bezeichnen  $T_A$  die Außentemperatur und  $P$  die elektrische Leistung der Gefriertruhe. Ferner geben  $\sigma_K$  und  $\sigma_H$  die thermischen Leitfähigkeiten der Gefriertruhe bzw. der Hütte in  $\text{WK}^{-1} \text{an}^7$ .

Aus den Gleichungen in (3.3) ergibt sich für die elektrische Leistung der Truhe im Gleichgewicht

$$P = \sigma_K \frac{(T_H - T_K)^2}{T_K} \stackrel{!}{=} \sigma_H (T_H - T_A). \quad (3.4)$$

Die Leistung  $P$  entspricht also der netto durch die Gefriertruhe in die Hütte transportierten Wärmeleistung, die gleich der von der Hütte durch Wärmeleitung an die Außenwelt abgegebenen Leistung sein soll<sup>8</sup>.

Gleichung (3.4) führt auf eine quadratische Gleichung für die Hüttentemperatur:

$$T_H^2 - \left(2 + \frac{\sigma_H}{\sigma_K}\right) T_K T_H + \left(T_K + \frac{\sigma_H}{\sigma_K} T_A\right) T_K = 0. \quad (3.5)$$

Aus dieser quadratischen Gleichung folgt die Hüttentemperatur zu

$$T_H = T_K \left\{ \left(1 + \frac{\sigma_H}{2\sigma_K}\right) - \sqrt{\left(1 + \frac{\sigma_H}{2\sigma_K}\right)^2 - \left(1 + \frac{\sigma_H}{\sigma_K} \frac{T_A}{T_K}\right)} \right\}. \quad (3.6)$$

<sup>7</sup>Der Faktor  $\sigma$  berücksichtigt dabei bereits die Geometrie des jeweiligen Wärmeleiters. Für einen quaderförmigen Wärmeleiter entspricht der Faktor  $\sigma$  dem Produkt aus spezifischer Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und der Querschnittsfläche des Quaders geteilt durch dessen Länge.

<sup>8</sup>Es sei schon an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass ein solches Gleichgewicht nicht in jedem Fall existieren muss.

Die zweite mögliche Lösung mit einem „+“ vor der Wurzel kann ausgeschlossen werden. Für den Fall, dass die Gefriertruhe ausgeschaltet ist, würde sich nämlich als Gleichgewichtstemperatur die Außentemperatur einstellen ( $T_K = T_H = T_A$ ). Dies geschieht nur, wenn vor der Wurzel ein „-“ steht.

Aus Gleichung (3.4) ergibt sich durch Umformen mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Temperaturwerten der Quotient der Wärmeleitfähigkeiten von Hütte und Gefriertruhe zu

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_K} = \frac{(T_H - T_K)^2}{(T_H - T_A) T_K} \approx 1,6. \quad (3.7)$$

Wenn nun eine zweite identische Gefriertruhe in der Hütte betrieben wird, verdoppelt sich durch die veränderte Geometrie effektiv die Wärmeleitfähigkeit der Gefriertruhe, d.h.  $\sigma_K$  wird durch  $2\sigma_K$  ersetzt und der Koeffizient  $\sigma_H/\sigma_K$  wird halbiert. Damit ist die sich in diesem Fall einstellende Hüttentemperatur  $T'_H$  gegeben durch

$$\begin{aligned} T'_H &= T_K \left\{ \left( 1 + \frac{\sigma_H}{4\sigma_K} \right) - \sqrt{\left( 1 + \frac{\sigma_H}{4\sigma_K} \right)^2 - \left( 1 + \frac{\sigma_H}{2\sigma_K} \frac{T_A}{T_K} \right)} \right\} \\ &= \left( T_K + \frac{(T_H - T_K)^2}{4(T_H - T_A)} \right) - \sqrt{\left( T_K + \frac{(T_H - T_K)^2}{4(T_H - T_A) T_K} \right)^2 - \left( T_K^2 + \frac{(T_H - T_K)^2 T_A}{2(T_H - T_A)} \right)}. \quad (3.8) \\ &\approx 281,7 \text{ K} \approx 8,5^\circ \text{C} \end{aligned}$$

- 3.b) Die elektrische Leistung der Gefriertruhen ergibt sich in dieser Betrachtung mit Hilfe von (3.4). Allerdings muss für die Berechnung noch eine der Wärmeleitfähigkeiten bestimmt werden. In der Aufgabenstellung wird die Erwärmung der Gefriertruhe außerhalb der Hütte beschrieben. Für die Temperatur  $T$  der Gefriertruhe gilt dabei näherungsweise

$$C \frac{dT}{dt} = \sigma_K (T_A - T(t)), \quad (3.9)$$

wobei  $C = 80 \text{ kJ K}^{-1}$  die Wärmekapazität der Gefriertruhe mit Inhalt bezeichnet. Durch Trennung der Variablen und Integration ergibt sich die Temperatur der Gefriertruhe in Abhängigkeit von der Zeit zu

$$T(t) = T_A + (T_K - T_A) e^{-\frac{\sigma_K}{C} t}. \quad (3.10)$$

Dabei gibt  $T_K$  die Gefriertruhentemperatur zur Zeit  $t = 0$  an. Die Wärmeleitfähigkeit der Gefriertruhe folgt daraus durch Umstellung zu

$$\sigma_K = \frac{C}{t} \ln \left( \frac{T_K - T_A}{T(t) - T_A} \right) \approx 25 \text{ W K}^{-1}, \quad (3.11)$$

wobei die gegebenen Temperaturen der Gefriertruhe nach 900 s bzw. 1800 s verwendet wurden.

Daraus folgt für die gesuchten Leistungen der Gefriertruhe(n)

$$\boxed{P = \sigma_K \frac{(T_H - T_K)^2}{T_K} \approx 59 \text{ W}} \quad \text{und} \quad \boxed{P' = 2\sigma_K \frac{(T'_H - T_K)^2}{T_K} \approx 137 \text{ W} > 2P}. \quad (3.12)$$

- 3.c) Bei einer Vergrößerung der Gefriertruhe erhöht sich auch deren Wärmeleitfähigkeit  $\sigma_K$  und der Quotient  $\sigma_H/\sigma_K$  wird kleiner. Da der Radikand in (3.6) für eine physikalisch sinnvolle Lösung aber

nicht negativ werden darf, ist die auf diese Weise erreichbare Hüttentemperatur beschränkt. Die maximale Hüttentemperatur  $T_{H,\max}$  wird erreicht, wenn der Radikand verschwindet. Dies passiert, wenn

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_K} = 4 \left( \frac{T_A}{T_K} - 1 \right) \approx 0,36. \quad (3.13)$$

Für kleinere Werte von  $\sigma_H/\sigma_K$  ist der Radikand negativ. Anschaulich besitzt Gleichung (3.4) dann keine reelle Lösung für  $T_H$  mehr, da die linke Seite für alle reellen Hüttentemperaturen größer als die rechte ist. Die Hütte würde sich also immer weiter erwärmen, bis die Gefriertruhe kaputt geht.

Im Grenzfall ist die maximale Hüttengleichgewichtstemperatur gegeben durch

$$T_{H,\max} \approx T_K \left( 1 + \frac{0,36}{2} \right) \approx 301,0 \text{ K} \approx 27,9^\circ\text{C}. \quad (3.14)$$

Diese Aufgabe ist angelehnt an eine im *Physics Teacher* als Physics Challenge publizierte Aufgabe: Korsunsky, B. (2013). When It's 2 Cool, It Gets Hot! *The Physics Teacher*, 51(1), 56.

Bewertung - Gefriertruhenheizung		Punkte
3.a)	Betrachtung der Gefriertruhe als Wärmepumpe und Beschreibung des Kühlprozesses	2
	Verwendung der Bedingung konstanter Entropie bzw. des Carnotwirkungsgrades	2
	Aufstellen geeigneter Leistungsbilanzen, wie z.B. in (3.3)	2
	Ableiten eines Ausdruckes für die Hüttentemperatur in Abhängigkeit von den relevanten Parametern (3.6)	2
	Ausschließen der unphysikalischen Lösung	1
	Bestimmung des Quotienten der Wärmeleitfähigkeiten von Hütte und Gefriertruhe (3.7)	1
	Erläuterung des Effektes einer zweiten Gefriertruhe auf Wärmeleitfähigkeiten bzw. Temperatur	2
	Bestimmung des Ergebnisses für die neue Hüttentemperatur (3.8)	1
3.b)	Betrachtung des Erwärmungsvorganges der Gefriertruhe	1
	Bestimmung des Parameters $\sigma_K$ (3.11)	3
	Aufstellen eines Ausdruckes für die elektrische Leistung wie in (3.4)	1
	Angabe des Ergebnisses für die elektrischen Leistungen (3.12)	2
3.c)	Erkennen des Einflusses der Vergrößerung der Gefriertruhe auf das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten	1
	Angabe einer limitierenden Bedingung, wie z.B. negativer Radikand in (3.6)	2
	Bestimmung der Bedingung für den Grenzfall (3.13)	1
	Berechnung des Ergebnisses für maximale Hüttentemperatur (3.14)	1
		<b>25</b>

## Aufgabe 4 Experimentelle Aufgabe - Oberflächenspannung

**(30 Pkt.)**
*(Idee: Axel Boeltzig)*

In dieser Aufgabe sollen Sie die Oberflächenspannung einer Seifenblasenlösung auf drei verschiedene Arten bestimmen. Die Oberflächenspannung  $\sigma$  ist über die Arbeit  $\Delta W$  definiert, die aufgebracht werden muss, um eine Oberfläche der Flüssigkeit um  $\Delta A$  zu vergrößern. Es ist also  $\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$ .

Eine einfache Seifenblasenlösung kann aus Wasser, Spülmittel und Zucker im Massenverhältnis 8:1:1 hergestellt werden. Sie können auch eine andere Seifenblasenlösung verwenden. Geben Sie aber auf jeden Fall die von Ihnen verwendete Rezeptur an.

Neben der Seifenblasenlösung können Sie die folgenden Materialien zum Experimentieren verwenden: eine Küchenwaage, eine Stoppuhr, eine Kette, ein Lineal, ein Stab, Faden, Draht, Strohhalm und andere, haushaltstypische Dinge.

### Seifenblasen

Mit einem vorher in die Seifenblasenlösung getauchten Strohhalm lassen sich leicht Seifenblasen erzeugen. Auf einer feuchten Oberfläche bilden sich halbkugelförmige Seifenblasen aus.

Sticht man mit einem Strohhalm in eine solche Blase, strömt die Luft aus. Das Ausströmen der Luft wird in guter Näherung durch das Gesetz von Hagen-Poiseuille beschrieben, nach dem der Volumenstrom  $\dot{V}$ , also das pro Zeit ausströmende Gasvolumen, gegeben ist durch

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{\ell}$$

Hierbei bezeichnen  $r$  und  $\ell$  den Radius bzw. die Länge des Strohhalmes,  $\Delta p$  die Druckdifferenz zwischen dessen Enden und  $\eta$  die Viskosität von Luft, die bei 20 °C einen Wert von  $\eta = 18,2 \cdot 10^{-6}$  Pa s besitzt. Sie können eine Unsicherheit von 1% für den Wert der Viskosität annehmen. Die Viskosität steigt mit der Temperatur um etwa 0,27% pro °C.

- 4.a) Zeigen Sie, dass die Zeit zum vollständigen Ablassen der Luft aus einer Seifenblase proportional zur vierten Potenz von deren anfänglichem Radius ist. Bestimmen Sie auf diese Weise experimentell die Oberflächenspannung der Seifenblasenlösung. (11 Pkt.)

### Kettenlinie

Werden die Enden einer Kette festgehalten, bildet sich als Folge der Gewichtskraft eine Kettenlinie aus. Schließt die Kette eine Seifenoberfläche ein, ändert sich diese Form durch den Einfluss der Oberflächenspannung.

Unter bestimmten Bedingungen bildet die Kette eine dreieckige Form, wie in der nebenstehenden Abbildung skizziert, aus.

- 4.b) Bestimmen Sie mithilfe dieser Konfiguration experimentell die Oberflächenspannung der Seifenblasenlösung. (8 Pkt.)

*Hinweis:* Falls die von Ihnen verwendete Kette zu leicht ist, um ihre Masse mit der Küchenwaage genau zu bestimmen, dürfen Sie diese auch mit einer Laborwaage z.B. in der Schule ermitteln.

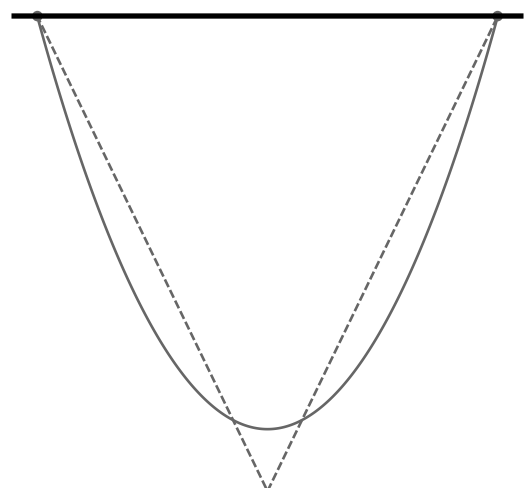


Abb. 6: Skizze einer hängenden Kette ohne (durchgezogen) und mit eingeschlossener Seifenhaut (gestrichelt).

### Kraftmessung

Die Oberflächenspannung kann ihrer Definition folgend auch über die Untersuchung einer Kraft bestimmt werden.

- 4.c) Ermitteln Sie die Oberflächenspannung der Seifenblasenlösung möglichst direkt mit einem geeigneten experimentellen Aufbau. (9 Pkt.)

### Vergleich und Diskussion

- 4.d) Vergleichen Sie die in den drei Experimenten erhaltenen Ergebnisse und Unsicherheiten für die Oberflächenspannung der Seifenblasenlösung. (2 Pkt.)

### Allgemeine Hinweise

Beschreiben Sie in allen Aufgabenteilen Ihre theoretischen Vorbetrachtungen und angewandte Näherungen, die genutzten Versuchsaufbauten, die experimentelle Durchführung und die Auswertung so, dass sie gut nachvollziehbar sind.

### Lösung

#### Seifenblasen

- 4.a) *Vorbetrachtung*

Die Energie der Oberfläche der halbkugelförmigen Seifenblase ist  $W(R) = 2 \cdot A \cdot \sigma$ , mit  $A = 2 \cdot \pi \cdot R^2$ . Der Faktor 2 trägt der Oberfläche innen und außen Rechnung. Damit folgt der durch die Oberflächenspannung erzeugte Druck

$$p_\sigma(R) = \frac{F(R)}{A} = \frac{dW(R)}{dR} \frac{1}{A} = \frac{4\sigma}{R}. \quad (4.1)$$

Dies entspricht der Druckdifferenz zwischen dem Inneren der Seifenblase und der Umgebung. Der Volumenfluss  $\dot{V}$  durch einen Strohhalm der Länge  $\ell_s$  und mit Radius  $r_s$  ist durch das Gesetz von Hagen-Poiseuille gegeben:

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} \left( \frac{2}{3} \pi R^3 \right) = 2 \pi R^2 \cdot \frac{dR}{dt} = \frac{\pi r_s^4}{8\eta} \cdot \frac{p_\sigma}{\ell_s} = \frac{\pi \sigma r_s^4}{2\eta \ell_s R}. \quad (4.2)$$

Für das Volumen der halbkugelförmigen Blase wurde dabei  $V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3$  verwendet. Wegen des geringen Drucks kann eine Kompression des Gases vernachlässigt werden. Nach Integration der Differentialgleichung erhält man mit der Anfangsbedingung  $R(0) =: R_0$  die zeitliche Entwicklung des Radius der Blase:

$$R(t)^4 = R_0^4 - \frac{\sigma r_s^4}{\eta \ell_s} t. \quad (4.3)$$

Die Zeit  $t_E$  bis zur vollständigen Entleerung der Blase ist daher gegeben durch

$$t_E = \frac{\eta \ell_s}{\sigma r_s^4} \cdot R_0^4 = \frac{\pi^2 \eta \ell_s^3}{\sigma V_s^2} R_0^4 =: m R_0^4. \quad (4.4)$$

Hierbei bezeichnet  $V_s = \pi \cdot r_s^2 \cdot \ell_s$  das Volumen des Strohhalmes.

Die Oberflächenspannung  $\sigma$  kann nach (4.4) aus dem Anstieg  $m$  einer Geraden  $t_E(R_0^4)$  bestimmt werden, wenn die Parameter  $\eta$ ,  $\ell_s$  und  $V_s$  bekannt sind.

$$\sigma = \frac{\pi^2 \eta \ell_s^3}{m V_s^2}. \quad (4.5)$$

### Durchführung

Die Länge des Strohhalmes wird mit dem Lineal vermessen:  $\ell_s = (18,40 \pm 0,05)$  mm. Der Strohhalm wird mehrfach mit Wasser gefüllt, das Wasser in einem Becher gesammelt und die Gesamtmasse mit der Waage bestimmt. Für  $N = 50$  Füllungen erhält man inklusive Becher  $m_{\text{voll}} = (257 \pm 1)$  g, der Becher alleine wiegt  $m_{\text{leer}} = (112 \pm 1)$  g. Mit der Dichte von Wasser ( $\rho_W = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ) folgt damit für das Innenvolumen des Strohhalmes

$$V_S = \frac{(m_{\text{voll}} - m_{\text{leer}})}{\rho_W N} \approx (2,90 \pm 0,04) \text{ mL} . \quad (4.6)$$

Mit dem Strohhalm werden halbkugelförmige Blasen auf einer angefeuchteten transparenten Folie aufgeblasen. Unter die Folie wurde vorher ein Blatt Millimeterpapier geschoben. Der Strohhalm wird dann zur Bestimmung des anfänglichen Radius zugehalten<sup>9</sup>. Auf dem Millimeterpapier werden die Durchmesser  $d_1$  und  $d_2$  der Blase entlang zweier orthogonaler Achsen abgelesen. Daraus wird der Anfangsradius  $R_0$  der Blase als halber Mittelwert bestimmt. Anschließend wird die Blase durch den Strohhalm entleert und die Zeit  $t_E$  bis zu ihrem vollständigen Verschwinden gemessen. Der Versuch wird für verschiedene Blasengrößen mehrfach wiederholt.

Tabelle 1: Entleerungszeiten verschieden großer Seifenblasen

Nr.	$d_1/\text{cm}$	$d_2/\text{cm}$	$R_0/\text{cm}$	$R_0^4/\text{cm}^4$	$t_E/\text{s}$
1	5,0	5,0	2,50	39	2,56
2	5,1	5,0	2,53	41	2,78
3	5,5	5,6	2,78	59	3,07
4	6,5	6,6	3,28	115	6,44
5	6,5	6,5	3,25	112	6,09
6	6,6	6,2	3,20	105	6,41
7	7,1	7,0	3,53	154	7,59
8	7,2	7,4	3,65	177	9,00
9	7,8	7,9	3,93	237	10,53
10	8,0	8,2	4,05	269	11,50
11	8,3	8,5	4,20	311	14,00
12	8,7	8,9	4,40	375	17,62
13	8,8	9,0	4,45	392	18,03
14	9,1	8,9	4,50	410	19,28
15	9,2	9,4	4,65	468	24,00
16	9,5	10,0	4,88	565	23,07
17	10,0	9,9	4,98	613	28,65
18	10,0	10,1	5,03	638	28,06
19	10,0	10,5	5,13	690	31,28
20	10,2	10,5	5,18	717	33,00
21	10,5	10,5	5,25	760	35,12
22	10,6	10,7	5,33	804	39,25
23	12,7	13,0	6,43	1704	72,00
24	12,9	12,6	6,38	1652	80,12
25	13,0	13,5	6,63	1926	86,63
26	13,4	13,7	6,78	2107	89,50
27	14,4	14,5	7,23	2725	118,81

Die angegebene zweite Nachkommastelle für  $R_0$  resultiert aus der Berechnung als halber Mittelwert. Als Unsicherheit in der Bestimmung des Radius wird 1 mm, und in der Zeit  $t_E$  1 s angenommen, da der Zeitpunkt des vollständigen Verschwindens der Blase nicht ganz genau gemessen werden kann.

Die Raumtemperatur kann auf einige Grad genau geschätzt werden und beträgt etwa 20 °C. Für  $\eta$  ergibt sich eine relative Unsicherheit von etwa 2%.

<sup>9</sup>Das Rausziehen der Strohhalmes und spätere Anstechen der Seifenblase hat gelegentlich zu Problemen geführt, da sich beim Anstechen mitunter eine Seifenblasenhaut über das Ende des Strohhalmes gelegt hat.



### Auswertung

Der Graph von  $t_E$  über  $R_0^4$  ist rechts zusammen mit möglichen Ausgleichsgeraden dargestellt. Für die einzelnen Datenpunkte dominiert klar die Unsicherheit von  $R_0$ .

Der Anstieg der eingezeichneten Geraden beträgt  $m = (4,44 \pm 0,30) \cdot 10^{-6} \text{ s m}^{-4}$ . Nach Gleichung (4.5) ergibt sich daraus mit den ermittelten Werten von  $\eta$ ,  $l_s$  und  $V_s$  für die Oberflächenspannung der Seifenblasenlösung

$$\sigma = (30,0 \pm 2,3) \text{ mN m}^{-1}. \quad (4.7)$$

Die Unsicherheit des Ergebnisses ergibt sich dabei ebenfalls nach (4.5) zu

$$\Delta\sigma = \sigma \sqrt{\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\right)^2 + \left(3 \frac{\Delta l_s}{l_s}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta V_s}{V_s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2} \approx 2,3 \text{ mN m}^{-1}. \quad (4.8)$$

Der Hauptbeitrag zur Unsicherheit des Ergebnisses kommt aus dem Anstieg  $m$ .

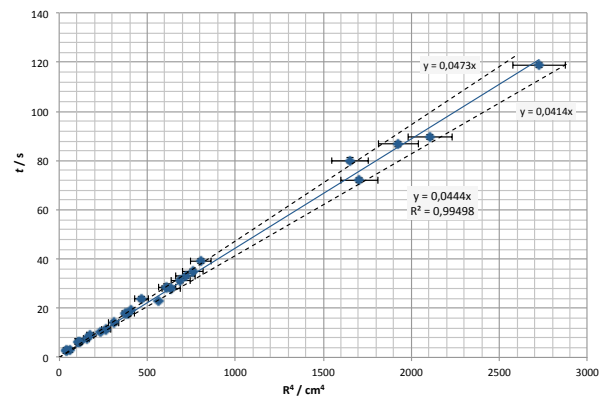


Abb. 7: Graph der Entleerungszeiten der Seifenblasen über der vierten Potenz des anfänglichen Radius.

## Kettenlinie

### 4.b) Vorbetrachtung

Die Aufgabenstellung folgt einem Artikel von Behroozi und Behroozi<sup>10</sup>. Die Kette habe die Masse pro Länge  $\mu := \frac{M}{L}$ . Betrachten wir nun ein kleines Teilstück  $ds$  der Kette in der dreieckigen Konfiguration. Die Gewichtskraft  $F_G = \mu ds g$  wirkt senkrecht nach unten. Zusätzlich wird eine Kraft  $F_\sigma = 2 ds \sigma$  durch die Oberflächenspannung hervorgerufen, welche senkrecht zur Kettenlinie wirkt.

Da die Kette keine Krümmung aufweist, muss die Kraft der Oberflächenspannung gerade durch die entsprechende Komponente der Gewichtskraft kompensiert werden. Daraus folgt die Bedingung für den Winkel  $\varphi$  des Dreiecks:

$$\sin \varphi = \frac{F_\sigma}{F_G} = \frac{2\sigma}{\mu g}. \quad (4.9)$$

Die Gewichtskraft der eingeschlossenen Seifenhaut kann vernachlässigt werden, wie sich leicht abschätzen lässt. Die Beobachtungen von Interferenzfarben legt eine Schichtdicke in der Größenordnung von  $\mu\text{m}$  nahe.

Mit der Dichte von Wasser erhält man damit Massen von etwa  $1 \text{ g m}^{-2}$ . Bei den vorkommenden Flächen ist die Masse des Seifenfilmes also deutlich geringer als die Masse der Kette.

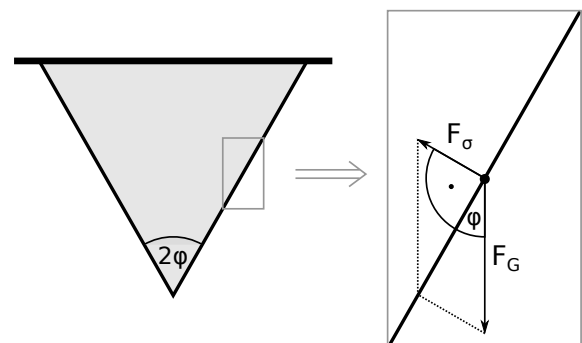


Abb. 8: Skizze zu den an der Kette auftretenden Kräften.

<sup>10</sup>Behroozi, F. & Behroozi, P. S. (2011). The effect of a soap film on a catenary: measurement of surface tension from the triangular configuration. *European Journal of Physics*, 32(5), 1237, welcher die modifizierte Kettenlinie allgemein diskutiert. Hier wird nur der Spezialfall des Dreiecks behandelt.

### Durchführung

Verwendet wird eine Kette von  $(77,3 \pm 0,5)$  cm Länge, für die eine Laborwaage sowohl im trockenen als auch im feuchten Zustand eine Masse von  $(8,0 \pm 0,1)$  g anzeigt. Wenn keine Laborwaage verwendet wird, kann eine indirekte Bestimmung der Masse (z.B. mit Hilfe einer Balkenwaage, siehe nächste Aufgabe) notwendig sein, um die relative Unsicherheit zu reduzieren. Die Enden der Kette werden an einem Lineal so festgehalten, dass sie noch verschoben werden können. Der Aufbau wird in Seifenlösung getaucht, waagrecht herausgehoben und die Aufhängepunkte der Kette entlang des Lineals verschoben, bis keine Krümmung mehr erkennbar ist (alternativ kann auch ein Stab verwendet werden, an den ein Lineal angelegt wird). Der Abstand  $x$  der Aufhängepunkte in dieser Konfiguration, also die Basisseite des gleichschenkligen Dreiecks, wird gemessen.

Die Messungen für  $x$  ergaben 46,5 cm, 45,2 cm, 44,6 cm, 45,1 cm und 45,2 cm – im Mittel also  $\bar{x} = 45,3$  cm. Die Einstellung der Konfiguration ist wegen der schwachen Krümmung nahe des Gleichgewichtsabstands und der begrenzten Lebensdauer des Seifenblasenfilms nicht ganz einfach, die Unsicherheit von  $x$  wird daher auf 1 cm geschätzt.

### Auswertung

Aus Gleichung (4.9) folgt

$$\sigma = \frac{M g x}{2 L^2} = 29,7 \text{ mN m}^{-1}, \quad (4.10)$$

sowie für die Unsicherheit der Ergebnisse

$$\Delta\sigma = \sigma \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\Delta L}{L}\right)^2} = 0,8 \text{ mN m}^{-1}. \quad (4.11)$$

Der Hauptbeitrag zur Unsicherheit von  $\sigma$  stammt in diesem Fall aus der Unsicherheit von  $x$ , gefolgt von  $M$ . Im Vergleich dazu ist die Unsicherheit von  $L$  vernachlässigbar.

## Kraftmessung

### 4.c) Vorbetrachtung

Bestimmt wird die Kraft, die notwendig ist, um einen Drahtrahmen senkrecht aus der Seifenblasenlösung zu ziehen. Die Kantenlänge parallel zur Flüssigkeitsoberfläche sei  $a$ , dann wirkt eine Kraft durch die Oberflächenspannung, die gegeben ist durch  $F_\sigma = 2 \cdot a \cdot \sigma$ , in Richtung Flüssigkeitsoberfläche.

Betrachtet man die Kraftdifferenz für die gleiche Position des Drahtrahmens einmal mit und einmal ohne Seifenhaut, entfällt die Gewichtskraft (und der Auftrieb) des Rahmens und es verbleibt nur  $F_\sigma$ . Die Gewichtskraft der Seifenhaut kann nach der gleichen Argumentation wie oben vernachlässigt werden.

### Durchführung

Zur Kraftmessung wird aus einem längeren Holzlineal und Faden eine Balkenwaage gebaut (vgl. Abb. 9). Zur besseren Messung der geringen Oberflächenspannungskräfte erhält die Seite des Rahmens eine Hebellänge von  $l_R = (35,0 \pm 0,1)$  cm und die des Ausgleichsgewichts eine Hebellänge von  $l_G = (15,0 \pm 0,1)$  cm. Als Masseneinheit zum Austarieren der Waage dienen Heftklammern.  $N = 2000$  Klammern wiegen  $M = (92 \pm 1)$  g. Der gebogene Drahtrahmen hat eine Kantenlänge von  $a = (9,55 \pm 0,05)$  cm.

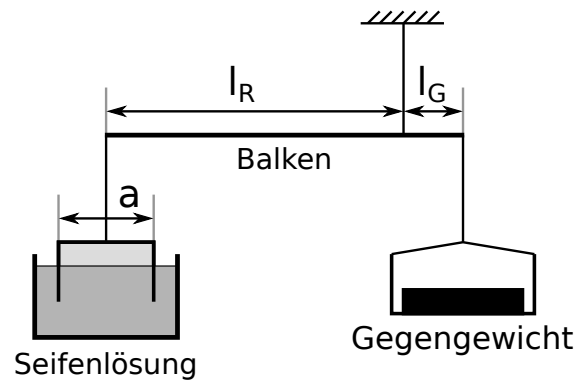


Abb. 9: Skizze der aufgebauten Balkenwaage.

Die Waage wird zunächst so austariert, dass die Kante des Rahmens kurz über dem Flüssigkeitsspiegel hängt, aber keine Seifenhaut einschließt. Anschließend wird der Rahmen eingetaucht, und es werden Heftklammern auf der Gegenseite hinzugefügt, bis sich dieser (mit Seifenhaut) wieder an der gleichen Position befindet.

Eine fünfmalige Durchführung des Versuchs ergab 29 bis 31 Heftklammern, die als zusätzliches Ausgleichsgewicht benötigt werden, also  $n = 30 \pm 1$ .

### Auswertung

Die Oberflächenspannung folgt aus den Messwerten direkt über:

$$\sigma = \frac{M n g l_G}{2 N a l_R} = 30,4 \text{ mN m}^{-1}. \quad (4.12)$$

Die Unsicherheit in dem Ergebnis ergibt sich zu

$$\Delta\sigma = \sigma \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_G}{l_G}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_R}{l_R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2} \approx 1,1 \text{ mN m}^{-1}. \quad (4.13)$$

Die Unsicherheit resultiert im Wesentlichen aus der von  $n$ .

### Vergleich und Diskussion

- 4.d) Die Oberflächenspannung  $\sigma$  der Seifenblasenlösung wurde auf drei verschiedenen Wegen experimentell bestimmt. Die Ergebnisse sind:

Seifenblasen	$\sigma = (30,0 \pm 2,3) \text{ mN m}^{-1}$	(4.14)
Kettenlinie	$\sigma = (29,7 \pm 0,8) \text{ mN m}^{-1}$	
Kraftmessung	$\sigma = (30,4 \pm 1,1) \text{ mN m}^{-1}$	

Alle drei Methoden ergeben sehr ähnliche Werte, die im Rahmen der Unsicherheiten sehr gut übereinstimmen. Die Messung des Entleerens der Seifenblasen liefert von allen drei Methoden die größte Unsicherheit, die aber immer noch unter 10% liegt.

Bewertung - Oberflächenspannung		Punkte
4.a)	Herleitung eines Zusammenhanges zwischen ursprünglichem Radius und Zeit zum Entleeren der Seifenblase	2
	Beschreibung des Aufbaus und der Durchführung des Versuches (mit Angabe des Rezeptes für die Seifenblasenlösung)	2
	Bestimmung der relevanten Abmessungen des Strohhalmes	1
	Aufnahme einer ausreichenden Anzahl von Messwerten für die Entleerungszeiten	2
	Auswertung der Messwerte (z.B. graphisch)	2
	Plausibles Ergebnis für Oberflächenspannung	1
	Fehlerabschätzung	1
4.b)	Theoretische Vorbetrachtung zur Bestimmung der Oberflächenspannung aus Messwerten	2
	Beschreibung des Aufbaus und der Durchführung des Versuches	1
	Bestimmung der Masse und Länge oder Masse pro Länge der Kette	1
	Aufnahme von Messwerten mit Wiederholungsmessung	1
	Auswertung der Messwerte	1
	Plausibles Ergebnis für Oberflächenspannung	1
	Fehlerabschätzung	1
4.c)	Idee und theoretische Vorbetrachtung für ein geeignetes Experiment	2
	Beschreibung des Aufbaus und der Durchführung des Versuches	3
	Aufnahme von Messwerten mit Wiederholungsmessung	1
	Auswertung der Messwerte	1
	Plausibles Ergebnis für Oberflächenspannung	1
	Fehlerabschätzung	1
4.d)	Vergleich der Ergebnisse und Diskussion zu möglichen Abweichungen	1
	Konsistenz der Ergebnisse (Abweichungen untereinander kleiner 10%)	1
		<b>30</b>

Die Werte für die Oberflächenspannung können, je nach Rezeptur der Seifenblasenlösung, von den hier gegebenen abweichen, sollten aber im Bereich von  $20 \text{ mN m}^{-1}$  bis  $40 \text{ mN m}^{-1}$  liegen (Die Oberflächenspannung von Wasser beträgt etwa  $70 \text{ mN m}^{-1}$ ).