50. Internationale PhysikOlympiade
Tel Aviv, Israel 2019

Lösungen zu den Vorbereitungsaufgaben zur 2. Runde des Auswahlwettbewerbs

Aufgabe 1 Heiße Scheibe (MC-Aufgabe)

(1. Runde zur 48. IPhO 2017)

Eine Metallscheibe mit einem Loch in ihrer Mitte wird erwärmt.

Was passiert beim Erwärmen?

A Das Loch wird größer. B Das Loch wird kleiner. C Das Loch bleibt gleich groß.

D Diese Frage lässt sich ohne weitere Informationen nicht beantworten.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Da sich das Material der Scheibe beim Erwärmen ausdehnt, dehnt sich jede Länge in der Scheibe aus, wobei die Mitte der Scheibe aus Symmetriegründen ortsfest bleibt. Insbesondere dehnt sich auch der Umfang des Loches aus, so dass das Loch insgesamt größer wird.

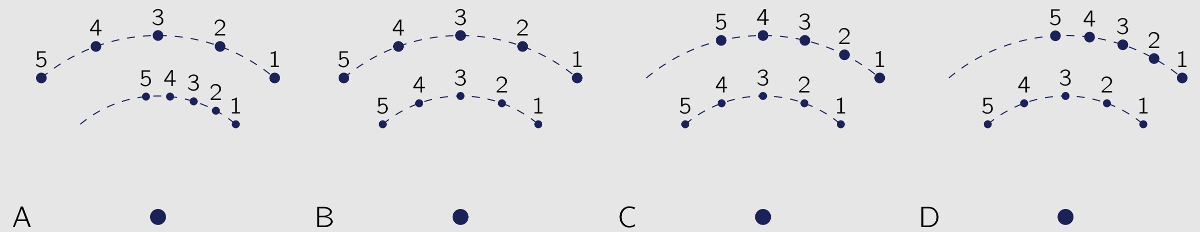
Korrekte Antwort: *A*

Aufgabe 2 Erde und Mars (MC-Aufgabe)

(1. Runde zur 48. IPhO 2017)

Die folgenden Abbildungen sollen, von rechts nach links, jeweils fünf Schnappschüsse der Bahnpositionen von Erde und Mars darstellen, die jeweils zu gleichen Zeiten aufgenommen worden sind. Die Verhältnisse der Bahnradien sind maßstabsgetreu, die Planeten aber stark vergrößert.

Gib an, welche der Abbildungen korrekt ist und begründe deine Antwort.



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz gilt für die Winkelgeschwindigkeiten ω_i von Mars und Erde sowie deren Abstände r_i zur Sonne

$$\omega_{\text{Erde}}^2\, r_{\text{Erde}}^3 = \omega_{\text{Mars}}^2\, r_{\text{Mars}}^3 \tag{2.1}$$

Da nach der Abbildung $r_{\text{Mars}} \approx 1,5\, r_{\text{Erde}}$ ist, gilt

$$\omega_{\text{Mars}} = \omega_{\text{Erde}} \left(\frac{r_{\text{Erde}}}{r_{\text{Mars}}}\right)^{3/2} \approx 0,54\, \omega_{\text{Erde}}\,. \tag{2.2}$$

In der Zeit, in der die Erde den dargestellten Winkelbereich durchlaufen hat, muss der Mars somit etwa die Hälfte des Bereiches durchlaufen haben. Beachtet man auch noch, dass der Mars, wenn die Erde 75% des dargestellten Bereiches durchlaufen hat, nur etwa 41% des Bereiches durchlaufen haben soll, dann verbleibt nur die ganz rechte Abbildung als korrekte Darstellung.

Korrekte Antwort: *D*

Aufgabe 3 Wärmekapazität (MC-Aufgabe)

(1. Runde zur 48. IPhO 2017)

Die gleiche Wärmeenergie wird vier Proben verschiedener Stoffe zugeführt. Die Temperatur von 3 g des Stoffes A erhöht sich dabei um 8 K, die Temperatur von 4 g des Stoffes B um 5 K, die Temperatur von 6 g des Stoffes C um 9 K und die Temperatur von 7 g des Stoffes D um 4 K.

Welcher Stoff hat die höchste spezifische Wärmekapazität?

A B C D

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die für eine Erwärmung einer Probe der Masse m um eine Temperaturdifferenz ΔT notwendige Wärmeenergie ΔE hängt gemäß

$$\Delta E = c \cdot m \cdot \Delta T$$

von deren spezifischer Wärmekapazität c ab. Die spezifische Wärmekapazität ist damit invers proportional zu dem Produkt $m \cdot \Delta T$. Die höchste spezifische Wärmekapazität hat also der Stoff, bei dem dieses Produkt am kleinsten ist.

Korrekte Antwort: *B*

Aufgabe 4 Fadenpendel

(Begleitheft der 1. Runde zur 50. IPhO 2019)

Aus einem dünnen Faden und einem kleinen Gewicht, wie zum Beispiel einer Schraube oder Mutter, lässt sich ein einfaches Fadenpendel bauen. Wenn die Ausdehnung des Gewichtes sehr klein gegenüber der Fadenlänge ℓ ist, gilt für die Schwingungsdauer T des Pendels bei kleinen Auslenkungen

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,.$$

Dabei bezeichnet g die Schwerebeschleunigung auf der Erde. Theoretisch sollte damit T^2 eine lineare Funktion der Fadenlänge ℓ sein.

Die folgende Tabelle stellt in einem Experiment gemessene Werte der Schwingungsperioden T zusammen mit der gemittelten Schwingungsperiode $\bar{T}$ und dem Quadrat dieser Größe dar.

Fadenlänge	Zeit für 10 Schwingungsperioden					Mittelwert	
ℓ / cm	$10\,T$ / s					$\bar{T}$ / s	$\bar{T}^2$ / s^2
67,2	16,62	16,87	15,43	17,50	17,61	1,68	2,82
55,5	15,12	13,94	16,18	15,04	15,53	1,51	2,29
47,0	13,79	12,60	13,37	14,41	14,80	1,38	1,90
34,5	11,93	13,02	10,77	12,18	11,72	1,19	1,42
22,0	9,50	11,44	9,24	9,59	8,73	0,97	0,94
13,4	7,91	6,38	8,32	8,91	7,89	0,79	0,62

Überprüfe mit Hilfe eines geeigneten Graphen, ob die experimentellen Daten zu dem theoretisch erwarteten Verlauf passen und bestimme den Wert der Schwerebeschleunigung g.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Abbildung 1 zeigt die quadrierte mittlere Schwingungsdauer $\bar{T}^2$ in Abhängigkeit von der Fadenlänge. Da die Ausgleichsgerade die Messwerte sehr gut approximieren, passen die Messergebnisse zu der theoretisch erwarteten linearen Abhängigkeit. Allerdings verläuft die Ausgleichsgerade nicht durch den Ursprung. Die lässt sich durch die endliche Ausdehnung der Mutter und eine daraus resultierende Abweichung zwischen Fadenlänge und Pendellänge erklären.

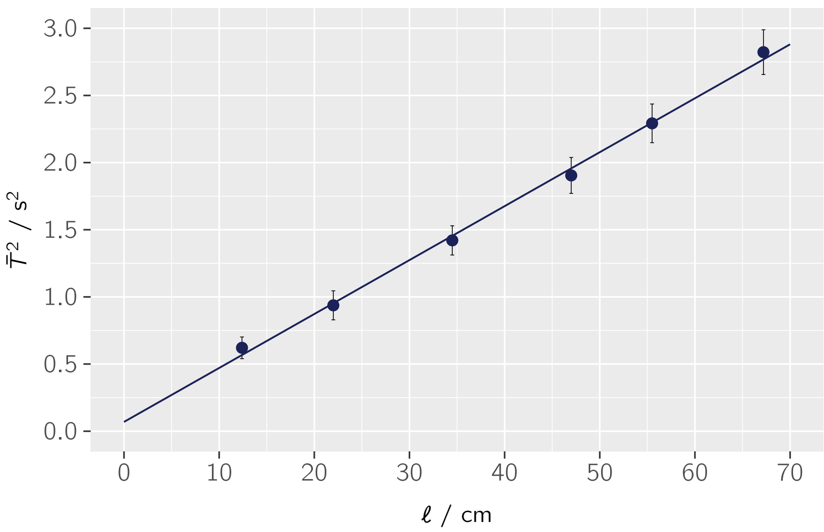


Abbildung 1: *Graph der quadrierten mittleren Schwingungsdauer $\bar{T}^2$ des Fadenpendels als Funktion der Fadenlänge ℓ mit Ausgleichsgerade. Die Unsicherheiten bei der Fadenlänge sind sehr gering und wurden nicht mit eingezeichnet.*

Aus der Steigung $b \approx (4{,}0 \pm 0{,}2)\,\mathrm{s^2\,m^{-1}}$ der Ausgleichsgeraden lässt sich mit der in der Aufgabenstellung angegebenen Formel die Schwerebeschleunigung auf der Erde bestimmen zu

$$\boxed{g = \frac{4\,\pi^2}{b} \approx (9{,}9 \pm 0{,}5)\,\mathrm{m\,s^{-2}}}\,. \tag{4.1}$$

Dieser Wert stimmt gut mit dem gemeinhin benutzten Wert von $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ überein. Der Fehler in der Steigung wurde dabei über andere, mit den Fehlern der Messwerte vereinbare, Ausgleichsgeraden abgeschätzt.

Aufgabe 5 Trägheitsmoment

(4. Runde zur 44. IPhO 2013)

Eine homogene Platte der Dicke d und Masse m besitze die Form eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a.

Berechne das Trägheitmoment der Platte bei Drehung um die zur Platte senkrechte Schwerpunktsachse.

Hinweis: Es ist möglich (aber nicht zwingend erforderlich) diese Aufgabe ohne Integration zu lösen.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Das Trägheitsmoment I des Dreieckes lässt sich über ein Ähnlichkeitsargument bestimmen.

Der Schwerpunkt S liegt auf dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, die bei einem gleichseitigen Dreieck durch diesen im Verhältnis 1:2 geteilt werden. In das Dreieck lassen sich, wie in nebenstehender Abbildung skizziert, vier halb so große aber ebenfalls gleichseitige Dreiecke einzeichnen. Das mittlere hat den selben Schwerpunkt, wie das ursprüngliche Dreieck. Die Schwerpunkte der anderen drei Dreiecke besitzen einen Abstand $\frac{2}{2\cdot 3}\,h$ von S. Hierbei bezeichnet $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$ die Höhe des Dreiecks.

Die Seitenlängen der kleinen Dreiecke betragen $a/2$, so dass deren Masse $m/4$ entspricht. Damit ist das Trägheitsmoment der kleinen Dreiecke bei Drehung um ihren Schwerpunkt $I/16$.

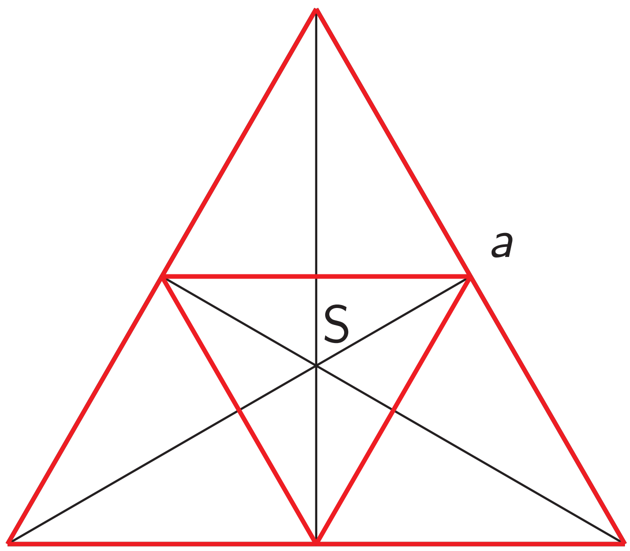


Abbildung 2: *Skizze zur Bestimmung des Trägheitsmomentes.*

Mit dem Satz von Steiner folgt daher für das Trägheitsmoment des großen Dreiecks durch Superposition

$$I = \frac{I}{16} + 3\left(\frac{I}{16} + \frac{m}{4}\frac{1}{4\cdot 3}\,a^2\right)\,. \tag{5.1}$$

Damit ist das Trägheitsmoment des großen Dreiecks bei Drehung um den Schwerpunkt schließlich

$$\boxed{I = \frac{1}{12}\,m\,a^2}\,. \tag{5.2}$$

Aufgabe 6 Abbildung mit Spiegel und Linse

(3. Runde zur 49. IPhO 2018)

Eine dünne Linse erzeugt ein Bild eines Objektes. Direkt hinter die Linse wird nun ein flacher Spiegel auf die optische Achse gestellt. Die Spiegelfläche ist dabei senkrecht zur optischen Achse. Die übrige Konfiguration bleibt unverändert. In diesem Fall entsteht ein Bild des Objektes, das denselben Betrag für die Vergrößerung aufweist.

Bestimme die Vergrößerung.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Der Spiegel reflektiert die einfallenden Strahlen, so dass die Situation äquivalent zu zwei dicht hintereinander stehenden, dünnen, identischen Linsen ist. Die Brennweite dieses Systems beträgt dann $f/2$, wobei f die Brennweite der einzelnen Linse bezeichnet. Damit gilt für die Vergrößerung ohne bzw. mit Spiegel:

$$V_1 = \frac{b_1}{g} = \pm\frac{b_2}{g} = V_2\,. \tag{6.1}$$

Das Vorzeichen muss positiv gewählt werden, wenn beide Bilder entweder reell oder imaginär sind und negativ, wenn genau eines der Bilder reell ist.

Die Bildweiten b_1 und b_2 lassen sich mit Hilfe der Abbildungsgleichung ausdrücken als

$$b_1 = \frac{g\,f}{g-f} \qquad \text{sowie} \qquad b_2 = \frac{g\,f}{2\,g-f}\,, \tag{6.2}$$

so dass sich obige Gleichung umformen lässt zu

$$\frac{f}{g-f} = \pm\frac{f}{2\,g-f}\,. \tag{6.3}$$

Daraus folgt für die Gegenstandsweite

$$g = 0 \quad \text{für } + \qquad \text{bzw.} \qquad g = \frac{2\,f}{3} \quad \text{für } -\,. \tag{6.4}$$

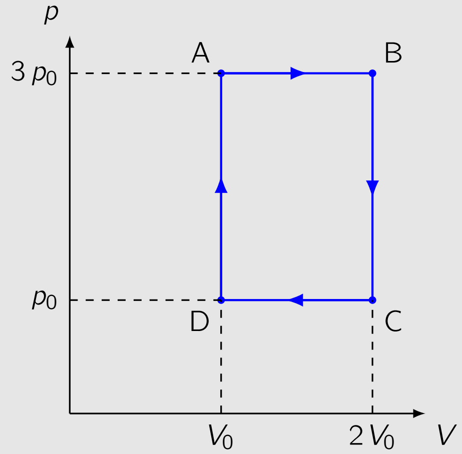
Das Vorzeichen in (6.1) muss also negativ sein, da sonst die Gegenstandsweite gleich Null wäre und kein Bild entstehen würde. Damit ist das von der Linse ohne Spiegel erzeugte Bild virtuell und die Vergrößerung ergibt sich nach (6.3) zu

$$\boxed{V = \frac{f}{g-f} = -3}\,. \tag{6.5}$$

Aufgabe 7 Temperaturen in einem Kreisprozess

n Mol eines idealen Gases durchlaufen den nebenstehenden Kreisprozess im Druck-Volumen- oder p-V-Diagramm.

Bestimme die minimale und maximale Temperatur des Gases in Abhängigkeit von den gegebenen Größen.



Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Für den Druck p, das Volumen V und die Temperatur T eines idealen Gases der Stoffmende n gilt die thermische Zustandsgleichung idealer Gase

$$p\,V = n\,R\,T\,. \tag{7.1}$$

Dabei bezeichnet R die universelle Gaskonstante.

In dem dargestellten Kreisprozess wird die minimale Temperatur T_{min} des Gases daher in dem Punkt D erreicht, da dort sowohl Druck als auch Volumen minimal sind. Die Temperatur beträgt dort

$$T_{\text{min}} = \frac{p_0\,V_0}{n\,R}\,. \tag{7.2}$$

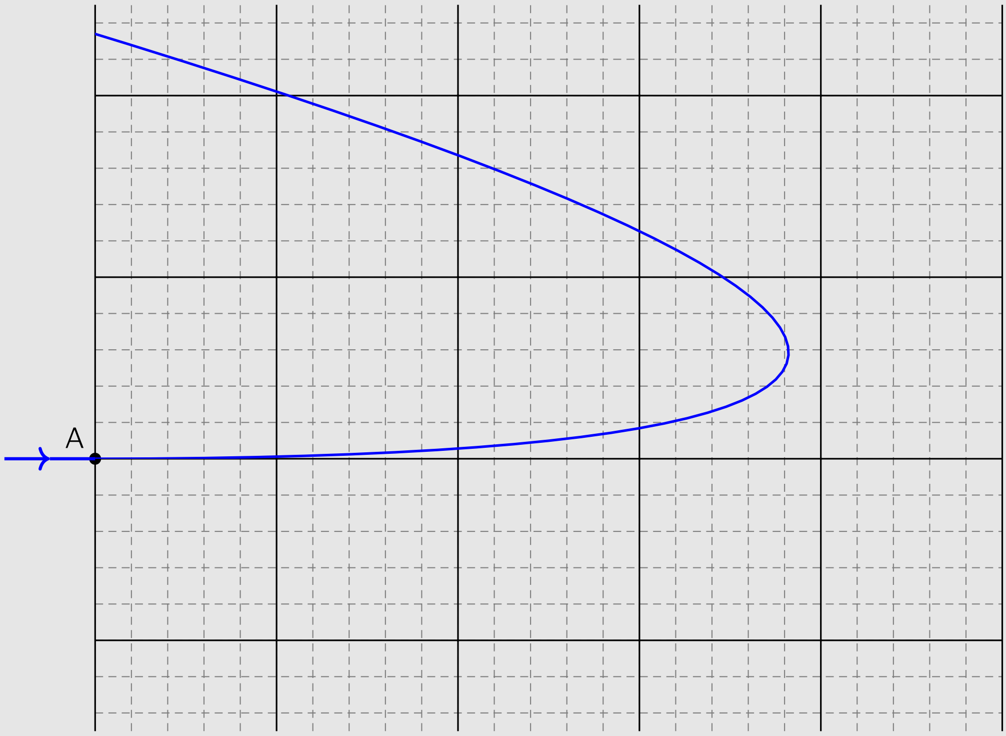
Analog wird die maximale Temperatur T_{max} des Gases in dem Punkt B erreicht, da dort sowohl Druck als auch Volumen maximal sind. Es ist

$$T_{\text{max}} = \frac{6\,p_0\,V_0}{n\,R} = 6\,T_{\text{min}}\,. \tag{7.3}$$

Aufgabe 8 Abgelenkt

(1. Runde zur 47. IPhO 2016)

Ein zuvor mit einer Spannung von 100 V beschleunigtes Elektron tritt am Punkt A in ein homogenes elektrisches Feld ein. Die Bahn des Elektrons ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Der Abstand der gestrichelten Linien in der Abbildung entspricht 4,0 mm und die Bewegung des Elektrons verläuft in der Zeichenebene.



Bestimme die Stärke und die Richtung des elektrischen Feldes, das zur Ablenkung des Elektrons führt.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Das elektrische Feld führt zu einer konstanten Beschleunigung entgegengesetzt der Richtung des elektrischen Feldes. Definiere ein Koordinatensystem mit x-Achse in Richtung der ursprünglichen Bewegungsrichtung des Teilchens, y-Richtung in der Zeichenebene nach oben und Ursprung im Punkt A.

Die Bewegung in x-Richtung wird nach Eintritt in das Feld durch die Komponente E_x des elektrischen Feldes abgebremst. Am Umkehrpunkt entspricht die potentielle Energie des Teilchens im elektrischen Feld gerade dessen anfänglicher kinetischer Energie, die gleich dem Produkt aus Beschleunigungsspannung $U = 100\,\mathrm{V}$ und Ladung $q < 0$ des Teilchens ist. Es gilt am Umkehrpunkt also

$$U\,q = q\,E_x\,x_{\mathrm{max}}\,. \tag{8.1}$$

Aus der Abbildung folgt mit $x_{\mathrm{max}} \approx 19{,}2 \cdot 4{,}0\,\mathrm{mm} \approx 76{,}8\,\mathrm{mm}$

$$\boxed{E_x = \frac{U}{x_{\mathrm{max}}} \approx 1{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{V\,m^{-1}}}\,. \tag{8.2}$$

Bezeichne t' die Zeit, die das Teilchen für das Durchlaufen der Bahn in dem elektrischen Feld benötigt. Da die Bewegung gleichmäßig beschleunigt ist, wird der Umkehrpunkt nach der Zeit $t'/2$ erreicht und es gilt für dessen x-Koordinate

$$x_{\text{max}} = x(t'/2) = v_0 \frac{t'}{2} + \frac{1}{2}\frac{q\,E_x}{m}\left(\frac{t'}{2}\right)^2 . \tag{8.3}$$

Dabei sind m die Masse des Teilchens und v_0 die Geschwindigkeit, mit der das Teilchen in das Feld eintritt. Letztere lässt sich über die Feldstärke ausdrücken durch

$$v_0 = -\frac{q\,E_x}{m}\frac{t'}{2} . \tag{8.4}$$

Eingesetzt in (8.3) führt dies auf

$$x_{\text{max}} = -\frac{1}{2}\frac{q\,E_x}{m}\left(\frac{t'}{2}\right)^2 . \tag{8.5}$$

Anfänglich besitzt das Teilchen keine Geschwindigkeit in y-Richtung. Daher schneidet die Teilchenbahn die y-Achse nach der Zeit t' bei

$$y_{\text{max}} = y(t') = \frac{1}{2}\frac{q\,E_y}{m}\,t'^2 . \tag{8.6}$$

Löst man die Gleichungen (8.5) und (8.6) nach t' auf, so lässt sich auch die y- Komponente des elektrischen Feldes aus dem Schnittpunkt $y_{\text{max}} \approx 11{,}8 \cdot 4{,}0\,\text{mm} \approx 47{,}2\,\text{mm}$ bestimmen zu

$$\boxed{E_y = -\frac{y_{\text{max}}}{x_{\text{max}}}\frac{E_x}{4} \approx -2{,}0 \cdot 10^2\,\text{V}\,\text{m}^{-1}} . \tag{8.7}$$

Das Minuszeichen resultiert aus der Beschleunigung des negativ geladenen Teilchens in positive y-Richtung. Das elektrische Feld besitzt also insgesamt eine Größe

$$\boxed{E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \approx 1{,}3 \cdot 10^3\,\text{V}\,\text{m}^{-1}} \tag{8.8}$$

und schließt einen Winkel

$$\boxed{\varphi = \tan^{-1}\frac{E_y}{E_x} \approx -8{,}7^\circ} \tag{8.9}$$

mit der ursprünglichen Bewegungsrichtung des Teilchens ein. Die Ergebnisse sind bis hierhin unabhängig von der Ladung des Teilchens und dessen Masse.

Aufgabe 9 Kondensator, Widerstand und Spule

(3. Runde zur 45. IPhO 2014)

Ein Kondensator, ein ohmscher Widerstand und eine Spule werden zusammen an eine Spannungsquelle, die eine sinusförmige Wechselspannung variabler Frequenz erzeugt, angeschlossen. Der folgende Graph zeigt den Verlauf des Scheinwiderstandes $|Z|$, also des Betrages des komplexen Widerstandes, der Schaltung als Funktion der Frequenz der Wechselspannung. Auch für höhere Frequenzen fällt der Scheinwiderstand nicht unter $400\,\Omega$. Außerdem ist bekannt, dass der Widerstandswert des ohmschen Widerstandes unter $200\,\Omega$ liegt.

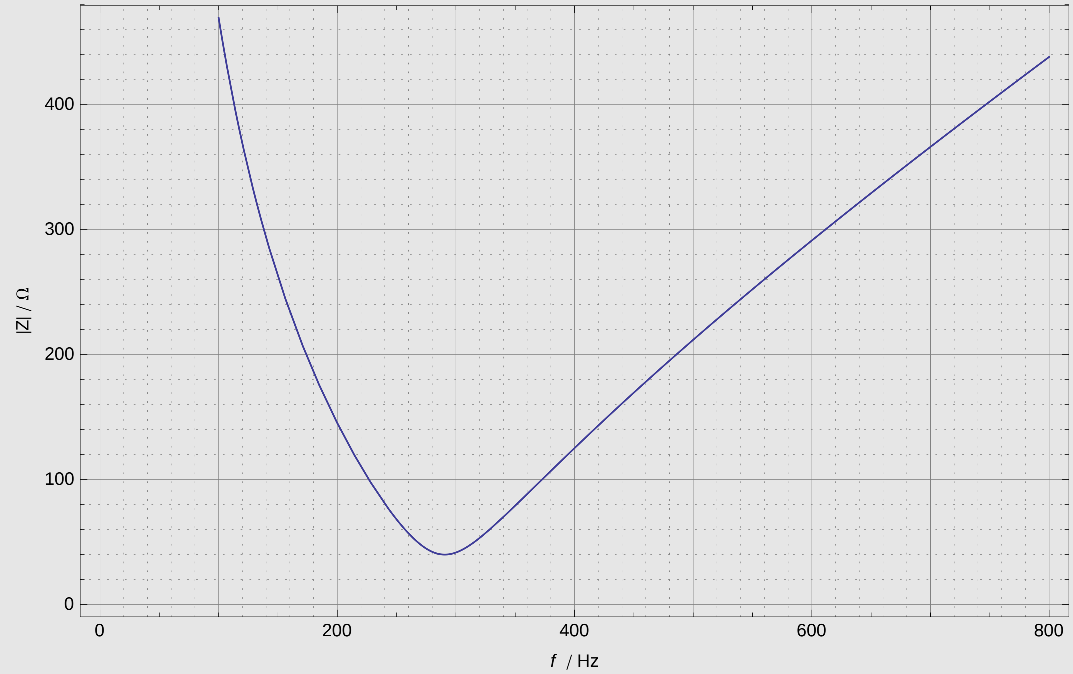


Abbildung 3: *Scheinwiderstand der Schaltung als Funktion der Wechselspannungsfrequenz.*

Gib an, wie die drei Bauteile verschaltet sind und begründe deine Angabe. Bestimme die Kapazität C des Kondensators, den Wert R des Widerstandes sowie die Induktivität L der Spule.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die einzige mit diesen drei Bauteilen mögliche Schaltung, die mit dem Verlauf des Graphen verträglich ist, ist eine Reihenschaltung aller drei Bauteile. Wäre der ohmsche Widerstand alleine parallel zu den beiden anderen Elementen geschaltet, so wäre der Scheinwiderstand der Schaltung immer kleiner oder gleich dem ohmschen Widerstand. Dies ist offensichtlich nicht der Fall. Wäre der ohmsche Widerstand in Reihe mit einem der anderen Bauteile parallel zu dem dritten Bauteil oder parallel zu einem der Bauteile und dann in Serie zu dem dritten geschaltet, so müsste der Scheinwiderstand asymptotisch entweder bei hohen oder niedrigen Frequenzen gegen Null bzw. R gehen. Dies wird in dem Graphen nicht beobachtet. Schließlich ist es noch denkbar, dass der Widerstand in Reihe mit einer Parallelschaltung aus Kondensator und Spule geschaltet ist. Auch in diesem Fall würde der Scheinwiderstand der Schaltung asymptotisch gegen den Wert R gehen, was nicht der Fall ist. Es verbleibt also die Serienschaltung der drei Elemente.

Der Scheinwiderstand der Schaltung ergibt sich zu

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,. \tag{9.1}$$

Die gesuchten Werte lassen sich dann aus dem Graphen ermitteln. Der ohmsche Widerstand entspricht dem Scheinwiderstand bei der Resonanzfrequenz, bei der der Blindwiderstand verschwindet:

$$\boxed{R = 40\,\Omega}\,. \tag{9.2}$$

Zur Bestimmung der Kapazität und der Induktivität kann man zwei Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 betrachten, die zu dem gleichen Scheinwiderstand $|Z|$ führen. Für $|Z| = 300\,\Omega$ sind dies $\omega_1 \approx 2\,\pi\,140\,\text{Hz}$ sowie $\omega_2 \approx= 2\,\pi\,612\,\text{Hz}$. Aus (9.1) ergeben sich dann die gesuchten Größen zu

$$\boxed{C = \frac{\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}}{\sqrt{|Z|^2 - R^2}} \approx 2{,}9\,\mu\text{F}}\,, \qquad \text{sowie} \qquad \boxed{L = \frac{\sqrt{|Z|^2 - R^2}}{\omega_2 - \omega_1} \approx 0{,}10\,\text{H}}\,. \tag{9.3}$$

Aufgabe 10 Protonen im Beschleuniger

(Idee: Thomas Hellerl)

Protonen mit Ruhemasse $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$ und einer Geschwindigkeit v kreisen in einem Beschleunigerring mit Radius $r = 1,50\,\text{km}$, der senkrecht von einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte $B = 8,07\,\text{mT}$ durchsetzt ist.

a) Zeige durch einen Kraftansatz, dass die Protonen einen Impuls von $1,94 \cdot 10^{-18}\,\text{Ns}$ besitzen.

b) Begründe mit einer klassischen Abschätzung der Protonengeschwindigkeit v, dass die Protonen relativistisch zu behandeln sind.

c) Bestimme die Gesamtenergie der Protonen mit dem Ergebnis aus a) in relativistischer Rechnung in J, in MeV und als Vielfaches der Ruheenergie.

d) Berechne die Geschwindigkeit v der Protonen in m/s und als Bruchteil von c.

e) Bestimme die von dem bewegten Proton „beobachtete“ Umfangslänge des Speicherrings.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

a) Mit dem Zentralkraftansatz folgt für den Impuls $p = m\,v$ des Protons

$$F_\text{Z} = \frac{m\,v^2}{r} = e\,v\,B = F_\text{Lorentz} \tag{10.1}$$

Beziehungsweise durch Umstellen

$$p = e\,B\,r = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,\text{As} \cdot 8{,}07 \cdot 10^{-3}\,\text{T} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{3}\,\text{m} \approx 1{,}94 \cdot 10^{-18}\,\text{Ns}\,. \tag{10.2}$$

b) Eine (falsche) klassische Abschätzung führt sogar zur Überlichtgeschwindigkeit für die Geschwindigkeit v des Protons:

$$v = \frac{p}{m_0} = \frac{1{,}94 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{Ns}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m\,s^{-1}} > c\,. \tag{10.3}$$

Deshalb ist das Proton relativistisch zu behandeln!

c) Die relativistische Energie-Impulsbeziehung liefert:

$$E = \sqrt{E_0^2 + (pc)^2} = c \cdot \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}\,. \tag{10.4}$$

Mit den angegebenen Werten ergibt sich

$$\begin{aligned} E &= 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \sqrt{(1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg})^2 (3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})^2 + (1{,}94 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{Ns})^2} \\ &= 6{,}01 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 3{,}75\,\mathrm{GeV} \approx 4 m_0\, c^2 =: \gamma m_0\, c^2\,. \end{aligned} \tag{10.5}$$

d) Mit $\gamma = 4$ aus der vorhergehenden Aufgabe erhält man mit $\beta = \frac{v}{c}$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies \frac{v}{c} = \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{15} \approx 0,97\,. \tag{10.6}$$

$$v \approx 2{,}90 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,. \tag{10.7}$$

e) Der Speicheringumfang stellt für das Proton einen bewegten Maßstab, der längs zur Bewegung gemäß der relativistischen Längenkontraktion gestaucht wird, dar.

$$u' = \frac{u}{\gamma} = \frac{2\pi 1{,}5\,\mathrm{km}}{4} \approx 2,4\,\mathrm{km}\,. \tag{10.8}$$