Auswahlwettbewerb zur Internationalen PhysikOlympiade

Lernblatt - Grundlagen der Fehlerfortpflanzung

Bastian Hacker / CC BY 4.0 / ipho@ipho.info

Messfehler

Bei physikalischen Messungen werden Messgrößen x_i aufgenommen und daraus das gesuchte Ergebnis

$$y(x_1, \ldots, x_n) \tag{0.1}$$

als Funktion der Messgrößen berechnet. Eine Messung von x_i ist in der Regel nicht unendlich genau, sondern enthält Messabweichungen (umgangssprachlich „Fehler“) Δx_i, die zu einer Unsicherheit Δy im Ergebnis führen. Zu einem physikalischen Experiment gehört daher nicht nur die Bestimmung des Ergebnisses, sondern auch des Fehlers. Denn erst mit Fehlerangabe wird klar, wie verlässlich der gemessene Wert ist.

Definition des Fehlerwertes Δy:
Die genaue Bedeutung des Fehlerwertes variiert. Oft entspricht Δy einer „Standardabweichung“, also der quadratisch gemittelten Abweichung. Bei normalverteilten Größen würde dann der wahre y-Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[y - \Delta y, y + \Delta y]$ liegen. Machmal werden stattdessen absolute Grenzen angegeben, zwischen denen der wahre Wert mit großer Sicherheit liegen sollte.

1 Eine Messgröße

Die Stärke, mit der sich ein Fehler in den Messgrößen x_i auf das Ergebnis y auswirkt, wird durch die Ableitung beschrieben:

$$\boxed{\Delta y(x_i) = \Delta x_i \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|} \tag{1.1}$$

Das gilt, so lange die Funktion $y(x_i)$ um den Messwert herum als lineare Funktion von x_i genähert werden kann, was in der Regel bei kleinen Messfehlern gut zutrifft.

Für Funktionen der Form $y(x_i) = a + b \cdot x_i^n$ ergibt die Ableitung

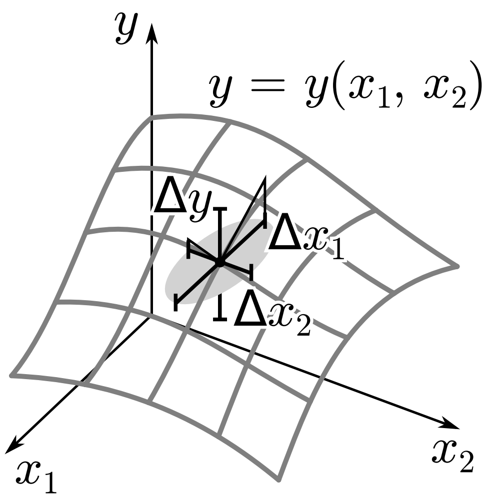
$$\Delta y(x_i) = b \cdot n \cdot \Delta x_i \ . \tag{1.2}$$

Insbesondere pflanzen sich bei der Proportionalität $y(x_i) = b \cdot x_i^n$ die relativen Fehler fort:

$$\left|\frac{\Delta y(x_i)}{y}\right| = \left|n\frac{\Delta x_i}{x_i}\right| \tag{1.3}$$

Wenn die Funktion $y(x_i)$ besonders kompliziert ist kann es sinnvoll sein, numerisch über den Differenzenquotienten abzuleiten:

$$\Delta y(x_i) = |y(x_i + \Delta x_i) - y(x_i)| \tag{1.4}$$



2 Mehrere Messgrößen

Bei mehreren fehlerbehafteten Messgrößen müssen die Beiträge der einzelnen Fehler kombiniert werden. Im schlimmsten Fall sind die Einzelfehler Δx_i komplett korelliert, dann addieren sich deren Beträge:

$$\Delta y = \sum_i \Delta y(x_i) \tag{2.1}$$

Alternativ, falls die Einzelfehler unkorreliert[1] sind, heben sie sich teilweise gegenseitig auf, und addie-

[1] Die beiden Summationsformeln (2.1) und (2.2) werden korrekt in der Matrixgleichung $V_y = J \cdot V_x \cdot J^T$ zusammengefasst. Hier sind V_x und V_y die Kovarianzmatrizen der Messwerte und des Ergebnisses, und J die Jakobimatrix (mehrdimensionale Ableitung). Das lässt sich aber nur am Computer sinnvoll auswerten.

ren sich dann quadratisch („Gaußsche Fehlerfortpflanzung“):

$$\Delta y = \sqrt{\sum_i (\Delta y(x_i))^2} \tag{2.2}$$

3 Fehler der Messgrößen

Die Fehler in den einzelnen Messgrößen x_i lassen sich je nach Typ unterschiedlich bestimmen:

- Bei analogen Messwerten, z.B. Länge mit Lineal, kann die Ablesegenauigkeit grob abgeschätzt werden, z.B. 0,3 mm.
- Bei digitalen Messgeräten ist der Fehler 0,5 Einheiten der letzten Stelle (genauer ist die Standardabweichung $1/\sqrt{12}$). Manche Messgeräte haben auch weitergehende Genauigkeitsangaben.
- Bei der Mittelung n streuender Messwerte wird die Standardabweichung des Mittwelwertes genommen, $\Delta x_i = \mathrm{std}(x_i)/\sqrt{n}$ wobei die empirische Standardabweichung des Ensembles $\mathrm{std}(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_j^n (x_{ij} - \overline{x_i})^2}$ ist. Je größer n, desto kleiner wird Δx_i.
- Wenn x_i aus einem Graphen, z. B. als die Steigung bestimmt wird, so lässt sich Δx_i aus der maximalen und minimalen Steigung bestimmen, die noch mit den aufgetragenen Messwerten kompatibel ist.
- Entstammt x_i einer Verteilungsfunktion, so kann man die Standardabweichung dieser Verteilung nehmen. Beispiel: $x_i = 100$ radioaktive Zerfälle sind Poisson-verteilt, damit $\Delta x_i = \sqrt{x_i} = 10$.
- Ein Zwischenwert x_i kann auch selbst schon von anderen Messwerten abgeleitet sein. Dann lässt sich die Fehlerfortpflanzung rekursiv anwenden.

4 Beispiel

Die Federkonstante k einer Spiralfeder soll durch Schwingungen eines Massenstücks m mit Periodendauer T bestimmt werden. Es ist

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad k = (2\pi)^2 \frac{m}{T^2} \tag{4.1}$$

Die beiden Messgrößen sind mit Messunsicherheit bekannt: $T \pm \Delta T$ und $m \pm \Delta m$. Hierbei könnte ΔT aus der Standardabweichung einer Messreihe bestimmt worden sein, und Δm durch die Anzeigegenauigkeit einer Waage.

Variable	Beispielgröße	Wert
$x_1 \pm \Delta x_1$	$T \pm \Delta T$	(0.78 ± 0.02) s
$x_2 \pm \Delta x_2$	$m \pm \Delta m$	(150 ± 10) g
$y \pm \Delta y$	$k \pm \Delta k$	(9.7 ± 0.8) N/m

Die Ableitungen zur Fehlerfortpflanzung sind in diesem Fall

$$\Delta k(T) = \Delta T \cdot \left|\frac{\partial k}{\partial T}\right| = \Delta T \cdot 8\pi^2 \frac{m}{T^3} = 0.5\,\mathrm{N/m} \tag{4.2}$$

$$\Delta k(m) = \Delta m \cdot \left|\frac{\partial k}{\partial m}\right| = \Delta m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = 0.6\,\mathrm{N/m} \tag{4.3}$$

Anstatt abzuleiten hätte man hier gemäß (1.3) auch einfacher $\Delta k(T) = \Delta T \cdot 2k/T$ und $\Delta k(m) = \Delta m \cdot k/m$ nehmen können.

Die Fehler ΔT und Δm sind unkorreliert. Daher ist der Gesamtfehler im Ergebnis

$$\Delta k = \sqrt{(\Delta y(T))^2 + (\Delta y(m))^2} =$$
$$= \sqrt{0.5^2 + 0.6^2}\,\mathrm{N/m} = 0.8\,\mathrm{N/m} \tag{4.4}$$

Tipp:
In der Praxis ist es sinnvoll, in diese Formel keine weiteren Formeln sondern berechnete Zwischenergebnisse einzusetzen. Damit wird die Formel nicht zu groß und unübersichtlich. Außerdem wird klar, welche Messgröße den größten Anteil zum Gesamtfehler liefert.

Das Messergebnis wird mit Messfehler in der Form $y \pm \Delta y$ angegeben:

$$k = (9.7 \pm 0.8)\,\mathrm{N/m} \tag{4.5}$$

5 Weiterführende Literatur

- Wikipedia: Fehlerfortpflanzung
- Fehler- und Ausgleichsrechnung (Peter Breitfeld)
- R. J. Barlow, Statistics