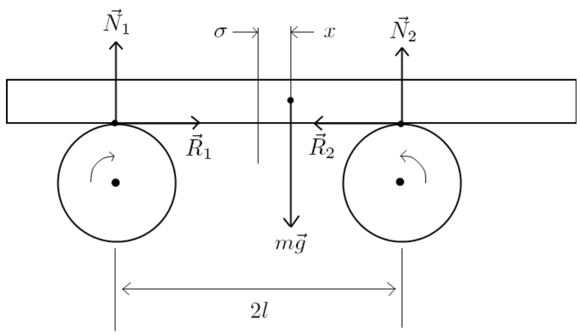
Lösung: Brett auf rotierenden Zylindern

(1. Runde 1979)

Wenn der Schwerpunkt des Brettes sich in der Symmetrieebene σ befindet, sind die Drücke auf die beiden Walzen gleich und damit auch die Reibungskräfte. Sie heben sich gegenseitig auf, und das Brett ist im Gleichgweicht.



Wenn der Schwerpunkt S des Brettes um x aus der Gleichgewichtslage verschoben ist, wirken auf das Brett die dargestellten Kräfte. Da es sich nicht vertikal bewegen kann, muß die Summe aller vertikalen Kräfte verschwinden.

$$N_1 + N_2 = mg. \tag{1}$$

Außerdem darf das Brett keine Rotation druchführen; die Drehmomente müssen sich ebenfalls aufheben:

$$N_1(l + x) = N_2(l - x). \tag{2}$$

Die Lösung des Gleichungssystemes (1) und (2) lautet:

$$N_1 = mg\frac{l - x}{2l} \tag{3}$$

$$N_2 = mg\frac{l + x}{2l}. \tag{4}$$

Daraus ergeben sich die Reibungskräfte

$$R_1 = N_1\mu = mgf\frac{l - x}{2l} \tag{5}$$

$$R_2 = N_1\mu = mgf\frac{l + x}{2l}, \tag{6}$$

und damit die resultierende Kraft auf das Brett in horizontaler Richtung:

$$F = R_1 - R_2 = -\frac{mg\mu}{l}x. \tag{7}$$

Diese Kraft ist proportional zu x und immer zur Ebene σ gerichtet. Das Brett vollführt eine harmonische Schwingung.

Die allgemeine Differentialgleichung der harmonischen Schwingung

$$F = -m\omega^2 x \tag{8}$$

hat die Lösung $x(t) = \widehat{x}\sin(\omega t + \varphi_0)$. Für unseren Fall ergibt sich demnach eine Kreisfrequenz von $\omega = \sqrt{\frac{g\mu}{l}}$ und die gesuchte Schwingungsperiode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\mu}}\,. \tag{9}$$

Dabei muß vorausgesetzt werden, daß die Umdrehungsgeschwindigkeit der Zylinder genügend groß ist.