Lösung: Ein seltsamer Kreisprozess

(2. Runde 1995)

Der Wirkungsgrad ist definiert als das Verhältnis der bei dem Prozess verrichteten Arbeit zur dem System zugeführten Wärme. Die Gesamtarbeit läßt sich leicht berechnen.

Die bei der linearen Expansion vom Gas verrichtete Arbeit ist durch die Fläche unter der Funktion $p(V)$ gegeben.

$$W_{0\to 1} = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)(V_1 - V_0)\,. \qquad (1)$$

Bei der adiabatischen Kompression ist $\Delta U = \Delta W$ und das Gas verrichtet die Arbeit

$$W_{1\to 0} = -\frac{3}{2}nR(T_0 - T_1) = -\frac{3}{2}(p_0V_0 - p_1V_1)\,. \qquad (2)$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\begin{aligned} W &= W_{0\to 1} + W_{1\to 0} \\ &= 2p_1V_1 - 2p_0V_0 + \frac{1}{2}p_0V_1 - \frac{1}{2}p_1V_0 \\ &= 636\,\mathrm{J}\,. \qquad (3) \end{aligned}$$

Die Bestimmung der dem System bei der linearen Expansion zugeführten Wärme erfordert genauere Überlegungen. Die Annahme, daß während des gesamten linearen Prozesses Wärme aufgenommen wird, führt nämlich auf einen Widerspruch. Es ergibt sich dann ein Wirkungsgrad von 1, also eine Verletzung des 2. Hauptsatzes. Das Gas nimmt also nicht während des gesamten linearen Prozesses Wärme auf, sondern nur anfangs. Ab einem bestimmten Punkt p_M, V_M, T_M wird der Wärmefluss jedoch umgekehrt. Dieser Punkt ist zunächst zu bestimmen.

Wir betrachten eine kleine lineare Expansion vom Zustand p, V, T zum Zustand $p-\Delta p, V+\Delta V, T+\Delta T$. Nach der Gasgleichung gilt:

$$\begin{aligned} pV &= nRT\,, \\ (p-\Delta p)(V+\Delta V) &= nR(T+\Delta T)\,. \end{aligned}$$

Aus den beiden Gleichungen folgt unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$p\Delta V - V\Delta p = nR\Delta T\,. \qquad (4)$$

Der 1. Hauptsatz liefert für die dabei aufgenommene Wärme

$$\Delta Q = \Delta U + W = \frac{3}{2}nR\Delta T + p\Delta V\,. \qquad (5)$$

Einsetzen von (4) in (5) ergibt:

$$\Delta Q = \frac{5}{2}p\Delta V - \frac{3}{2}V\Delta p\,. \qquad (6)$$

Wenn die kleine Expansion gerade zum gesuchten Punkt p_M, V_M, T_M führt, wird der Wärmefluss umgekehrt, d.h. es ist $\Delta Q = 0$ Man erhält also

$$\frac{5}{2}p_M\Delta V = \frac{3}{2}V_M\Delta p\,. \qquad (7)$$

Da es sich um einen linearen Prozeß handelt, ist die Geradensteigung $-\frac{\Delta p}{\Delta V}$ konstant gleich

$$-\frac{p_0 - p_1}{V_1 - V_0} = -\frac{\Delta p}{\Delta V}\,.$$

Damit erhält man

$$p_M = \frac{3}{5}V_M\frac{p_0 - p_1}{V_1 - V_0}\,. \qquad (8)$$

Eine zweite Bedingung zur Bestimmung des Punktes M liefert die Geradengleichung direkt.

$$p_M = -\frac{p_0 - p_1}{V_1 - V_0}(V_M - V_0) + p_0\,. \qquad (9)$$

Aus (8) und (9) erhält man

$$\begin{aligned} V_M &= \frac{5}{8}\left(p_0\frac{V_1 - V_0}{p_0 - p_1} + V_0\right) = \frac{1275}{31}\,\mathrm{m}^3 \qquad (10) \\ p_M &= \frac{3}{8}\left(V_0\frac{p_0 - p_1}{V_1 - V_0} + p_0\right) = \frac{765}{56}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\,. \qquad (11) \end{aligned}$$

Nun kann die bei der linearen Expansion zwischen den Punkten 0 und M zugeführte Wärme in der üblichen Weise bestimmt werden.

$$Q = \Delta U + W\,. \qquad (12)$$

Die vom Gas verrichtete Arbeit ist analog zu (1)

$$W = \frac{1}{2}(p_0 + p_M)(V_M - V_0)\,. \qquad (13)$$

Die innere Energie ändert sich um

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{3}{2}nR\Delta T \\ &= \frac{3}{2}nR(T_M - T_0) \\ &= \frac{3}{2}(p_MV_m - p_0V_0)\,. \qquad (14) \end{aligned}$$

Einsetzen von (13) und (14) in (12) ergibt

$$\begin{aligned} Q &= 2p_M V_M - 2p_0 V_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} p_0 V_M - \frac{1}{2} p_M V_0 \qquad (15) \\ &= 1215\,\mathrm{J}\,. \end{aligned}$$

Der gesuchte Wirkungsgrad ergibt sich als Quotient von (3) und (15)

$$\eta = \frac{636}{1215} = 0,52\,.$$

Der Wirkungsgrad eines Carnot-Prozesses ist

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_H} = 1 - \frac{p_1 V_1}{p_H V_H}\,. \qquad (16)$$

wenn T_H und T_1 die bei dem Prozeß auftretenden Maximal- und Minimaltemperaturen sind.
Nun ist aber die Maximaltempertatur des analysierten Prozesses keineswegs T_M. Für T_M gilt $\frac{dQ}{dV} = 0$; die Maximaltemperatur T_H wird hingegen erreicht für $\frac{dT}{dV} = 0$ bzw. $\frac{dU}{dV} = 0$. Aus Gleichung (4) folgt dann

$$p_H \Delta V = V_H \Delta P \qquad (17)$$

und durch Einsetzen der Geradensteigung

$$p_H = V_H \frac{p_0 - p_1}{V_1 - V_0}\,. \qquad (18)$$

Andererseits gilt analog zu (9)

$$p_H = -\frac{p_0 - p_1}{V_1 - V_0}(V_H - V_0) + p_0\,. \qquad (19)$$

Aus (18) und (19) erhält man

$$\begin{aligned} V_H &= \frac{1}{2}\left(p_0 \frac{V_1 - V_0}{p_0 - p_1} + V_0\right) = \frac{1020}{31}\,\mathrm{m}^3 \qquad (20) \\ p_H &= \frac{1}{2}\left(V_0 \frac{p_0 - p_1}{V_1 - V_0} + p_0\right) = \frac{255}{14}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\,. \qquad (21) \end{aligned}$$

Der Wirkungsgrad eines Carnot-Prozesses, der zwischen den selben Temperaturextremen arbeitet wie der betrachtete Kreisprozeß, ist also

$$\eta_C = 1 - 0.11 = 0,89\,.$$