Lösung: Das schwingende Reagenzglas

(2. Runde 2001)

Theorie

Es sei $z - z_0 = x$ die Auslenkung aus der Ruhelage. Dann gilt, bei Vernachlässigung der Reibungskräfte, wegen des Archimedischen Prinzips die Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} + \rho g A x = 0\,.$$

Wegen

$$\omega^2 = \frac{\rho g A}{m} \quad \text{gilt} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{A\rho g}\, m =: \alpha\, m\,,$$

mit $m = m_0 + n\, m_1$, wobei m_0 die Masse des Reagenzglases, m_1 die Masse einer Büroklammer und n die Anzahl der Büroklammern dartellt. Außerdem ist $\rho = 1{,}00\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ sowie $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Die Querschnittsfläche des Reagenzglases wird darüber hinaus mit A bezeichnet.

Messung und Auswertung

Querschnittsfläche A

Eine Messung des Umfanges des Reagenzglases (z.B. Glas mit Papier umwickeln und ausmessen) ergibt einen Wert von $4{,}8\,\mathrm{cm}$. Dadurch erhält man für den Radius $r = \frac{4{,}8}{2\pi} = 0{,}76\,\mathrm{cm}$. Dies ergibt:

$$A = \pi r^2 = 1{,}8\,\mathrm{cm}^2\,,$$

$$\alpha = 0{,}022\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{g}}\,.$$

Schwingungsdauern

n	25	28	30	33	35	37
$3T$ / s	1,98	2,041	2,132	2,169	2,222	2,231
T^2 / s^2	0,435	0,463	0,505	0,523	0,548	0,553

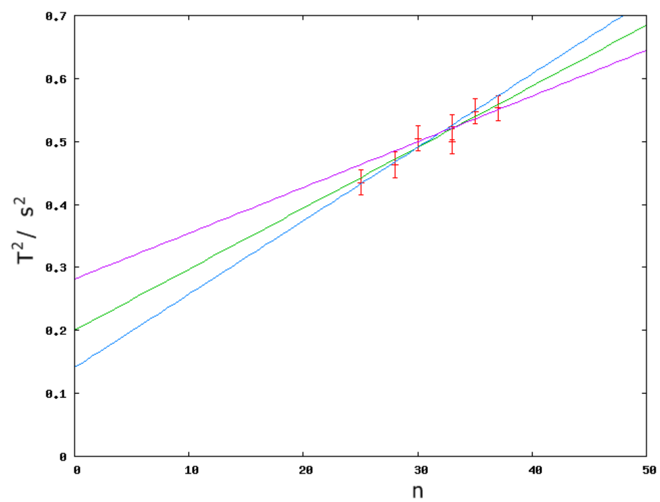
Fehlerrechnung:
Die Schwingungsdauern wurden für jedes n 10mal gemessen und gemittelt.
Für den mittleren absoluten Fehler in $\overline{T}$ gilt:

$$\Delta T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(T_i - \overline{T})^2}{k(k-1)}}\,.$$

Hierbei ist k die Anzahl der Messungen.
(Achtung die Funktion 'Standardabweichung' sx im Taschenrechner ergibt den Fehler der Einzelmessung, nicht den des Mittelwertes: $\Delta x = \frac{sx}{\sqrt{k}}$).
Mit $\Delta(T^2) = 2T\Delta T$ und $T \approx 0{,}7\,\mathrm{s}$; $\Delta T \approx 0{,}007\,\mathrm{s}$ ergibt sich als gemeinsame Standardabweichung für T_i^2:

$$\Delta(T^2) = 0{,}01\,\mathrm{s}^2\,.$$

Schätzt man den systematischen Fehler (vor allem wegen der unvermeidbaren pendelnden Bewegung) etwa gleich groß ein, ergibt sich ein Absolutfehler für T^2 von $\Delta(T^2) \approx 0{,}02\,\mathrm{s}^2$. Trägt man T^2 über n auf, ergibt sich folgender Graph.



Die Ausgleichsgerade (grün) hat einen Achsenabschnitt von $T_0^2 = 0{,}2\,\mathrm{s}^2$ und die Steigung hat den Wert $\frac{T^2}{\Delta n} = 0{,}0097\,\mathrm{s}^2$. Aus

$$\begin{aligned} T^2 &= \alpha(m_0 + m_1 n) \quad \text{folgt} \\ m_0 &= \frac{1}{\alpha} T_0^2 = \frac{0{,}2}{0{,}022}\,\mathrm{g} = 9{,}1\,\mathrm{g}\,, \\ m_1 &= \frac{1}{\alpha}\frac{T^2}{\Delta n} = \frac{0{,}0097}{0{,}022}\,\mathrm{g} = 0{,}44\,\mathrm{g}. \end{aligned}$$

Zur Fehlerabschätzung zeichnet man zwei Ausgleichsgeraden (blau und lila) so, dass diese gerade noch durch die Fehlerbalken der Einzelmessungen verlaufen. Daraus ergeben sich die Minimal- und Maximalwerte für m_0 und m_1 zu

Minimalwerte:	$m_0 = 6{,}4\,\mathrm{g}$	$m_1 = 0{,}33\,\mathrm{g}$
Maximalwerte:	$m_0 = 12{,}8\,\mathrm{g}$	$m_1 = 0{,}53\,\mathrm{g}$
Mittelwerte:	$m_0 = (9{,}6 \pm 3{,}2)\,\mathrm{g}$	$m_1 = (0{,}4 \pm 0{,}1)\,\mathrm{g}\,.$

Bemerkungen

1. Die Schwierigkeit des Experiments liegt darin, dass die gemessenen Zeiten nur sehr wenig differieren. Das verlangt sorgfältiges Experimentieren und Messen sowie eine seriöse Fehlerbetrachtung.

2. Die vertikalen Schwingungen sind stark gedämpft und gehen leicht in undefinierte, pendelnde Schwingungen über. Mehr als 3 Vertikalschwingungen sind kaum zu erreichen.

3. Verwendet man kleine Büroklammern, so erreicht man Vertikalschwingungen für etwa $25 \leq n \leq 40$.

4. Auch bei sorgfältiger Messung sind die Fehler nicht kleiner als etwa 30%. Sind die Ergebnisse deutlich genauer oder sind deutlich mehr bzw. weniger Büroklammern verwendet worden, dann liegt der Verdacht nahe, dass die Massen per Analysenwaage bestimmt und in die 'Messungen' rückgerechnet worden sind.

5. Die Absolutwerte für m_0 und m_1 können von den abgegebenen Werten abweichen, weil ein anderes Reagenzglas und andere Büroklammern verwendet wurden.